



## Scuola Superiore di Catania

*Corso Specialistico*

a.a. 2024-2025

### ***Introduzione alle curve ellittiche e la congettura di Birch-Swinnerton-Dyer***

*Introduction to elliptic curves and the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture*

#### Lingua/e dell'insegnamento:

Inglese e Italiano

#### Prerequisiti richiesti:

Corso di Geometria II Laurea Triennale in Matematica ed eventualmente Elements of Advanced Geometry Laurea Triennale in Matematica.

#### Obiettivi formativi:

L'obiettivo del corso è quello di introdurre gli studenti agli aspetti aritmetici delle curve ellittiche. In particolare si cercherà di fornire agli studenti gli strumenti necessari a comprendere l'importanza delle curve ellittiche nel panorama recente della matematica, resa evidente con l'inclusione della congettura di Birch–Swinnerton-Dyer nella lista dei sette problemi del millennio. Attraverso lo studio degli aspetti più aritmetici, si presenteranno anche degli strumenti computazionali che consentono un approccio più diretto allo studio delle curve ellittiche, come il database LMFDB e i software SAGE e/o PARIS GP. Se il tempo fosse sufficiente, si cercherà di illustrare alcune connessioni con altri importanti problemi in matematica, come l'ultimo teorema di Fermat, la congettura ABC, le congetture di Weil e l'ipotesi di Riemann. Il corso prevede anche la possibilità di presentare agli studenti possibili problemi di ricerca che possano essere alla loro portata.

#### Contenuti delle lezioni:

Modulo 1: richiamo alla teoria delle cubiche lisce e definizione di curve ellittiche di caratteristica 0. Gruppo dei punti razionali e forma di Weierstrass. Dimostrazione del teorema di Mordell–Weil per curve ellittiche sul campo dei razionali in presenza di un punto di torsione non banale. Teorema di struttura: rango e parte di torsione. Riduzione di una curva ellittica sui razionali modulo un primo e teorema di Nagell–Lutz. Modulo 2: Definizione di curve ellittiche su campi finiti. Funzione L di una curva ellittica sui razionali. Congettura di Birch–Swinnerton-Dyer. Funzione zeta di una curva ellittica su un campo finito. Congetture di Weil per curve ellittiche su campi finiti. Modulo 3: Assegnazione e discussione di possibili problemi di ricerca.



Metodologia didattica:

Lezioni teoriche e lezioni di esercitazioni/esempi frontali

Modalità della verifica finale di apprendimento:

Colloquio finale sugli argomenti del corso