

Scuola Superiore di Catania  
Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari  
A.A. 2024-2025

Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica  
(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

10 Settembre 2024

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.**

**Esercizio 1.** Aldobrando e Brienne hanno appena scoperto un tesoro! Questo consiste di 400 lingotti d'oro, dal peso di  $10g, 20g, 30g, 40g, \dots, 4000g$ . Dimostrare che possono spartirsi il tesoro in modo che entrambi ricevano sia lo stesso numero di lingotti, sia lo stesso peso in oro.

**Esercizio 2.** Tutti siamo familiari con il teorema di Pitagora: dato un triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (ovvero aventi come lato un cateto) è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Il teorema di Pentagora è invece la seguente affermazione: dato un triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $A$ , la somma delle aree dei pentagoni regolari costruiti sui cateti  $AB$  e  $AC$  (ovvero dei pentagoni regolari aventi come lati  $AB$  e  $AC$ , rispettivamente) è equivalente all'area del pentagono regolare costruito sull'ipotenusa  $BC$ . Sapreste dimostrare il teorema di Pentagora?

**Esercizio 3.** Gli interi positivi  $2, 3, 4$  si fattorizzano utilizzando solo i primi  $2$  e  $3$ . Esistono altri tre interi positivi consecutivi (il primo dei quali maggiore di  $2$ ) i cui fattori primi siano solo  $2$  e  $3$ ?

**Esercizio 4.**

(1) Determinare tutte le terne  $(a, b, c)$  di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ ab + bc + ca = -6 \\ abc = 8. \end{cases}$$

(2) Determinare tutte le terne  $(a, b, c)$  di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = -36. \end{cases}$$

**Esercizio 5.** Dato un intero positivo  $n$ , denotiamo con  $p(n)$  il prodotto delle sue cifre nella usuale rappresentazione decimale (per esempio,  $p(59) = 5 \cdot 9 = 45$  e  $p(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ). Determinare tutti i valori interi positivi assunti dal rapporto  $\frac{3p(n)}{n}$ ; in altre parole, determinare per quali interi positivi  $r$  l'equazione  $\frac{3p(n)}{n} = r$  ha almeno una soluzione intera positiva  $n$ .

*Il testo continua sul retro*

**Esercizio 6.** Sia  $n \geq 2$  un intero, siano  $x_1, \dots, x_n$  interi positivi, e sia  $S$  l'insieme degli interi della forma  $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$ .

**Esempio.** Se  $n = 3$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 10$ , l'insieme  $S$  è formato dagli otto elementi

$$1 + 2 + 10 = 13, \quad 1 + 2 - 10 = -7, \quad 1 - 2 + 10 = 9, \quad 1 - 2 - 10 = -11$$

$$-1 + 2 + 10 = 11, \quad -1 + 2 - 10 = -9, \quad -1 - 2 + 10 = 7, \quad -1 - 2 - 10 = -13.$$

Supponiamo che, come nell'esempio qui sopra, gli elementi ottenuti da tali somme e differenze siano tutti distinti, cosicché  $|S| = 2^n$ .

- (1) Dimostrare che la somma dei quadrati degli elementi di  $S$  è pari a  $2^n$  volte la somma dei quadrati dei numeri  $x_1, \dots, x_n$ .
- (2) Chiamiamo  $T$  la somma dei quadrati dei numeri in  $S$ . Dimostrare che per ogni numero reale positivo  $a$  si ha

$$|\{s \in S : |s| \geq a\}| \leq \frac{T}{a^2}.$$

- (3) Dedurre che il massimo fra  $x_1, \dots, x_n$  vale almeno  $\frac{2^n}{6\sqrt{n}}$ .