

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari
A.A. 2024–2025

Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica

Soluzioni

(Corsi di Laurea *diversi da* Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

10 Settembre 2024

1 Problemi

1. Aldobrando e Brienne hanno appena scoperto un tesoro! Questo consiste di 400 lingotti d'oro, dal peso di $10g, 20g, 30g, 40g, \dots, 4000g$. Dimostrare che possono spartirsi il tesoro in modo che entrambi ricevano sia lo stesso numero di lingotti, sia lo stesso peso in oro.
2. Tutti siamo familiari con il teorema di Pitagora: dato un triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (ovvero aventi come lato un cateto) è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa. Il teorema di Pentagora è invece la seguente affermazione: dato un triangolo ABC , rettangolo in A , la somma delle aree dei pentagoni regolari costruiti sui cateti AB e AC (ovvero dei pentagoni regolari aventi come lati AB e AC , rispettivamente) è equivalente all'area del pentagono regolare costruito sull'ipotenusa BC . Sapreste dimostrare il teorema di Pentagora?
3. Gli interi positivi $2, 3, 4$ si fattorizzano utilizzando solo i primi 2 e 3 . Esistono altri tre interi positivi consecutivi (il primo dei quali maggiore di 2) i cui fattori primi siano solo 2 e 3 ?
4. (a) Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ ab + bc + ca = -6 \\ abc = 8. \end{cases}$$

- (b) Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = -36. \end{cases}$$

2 Soluzioni

1. Numeriamo i lingotti da 1 a 400 , con il lingotto i -esimo che pesa $10i$ grammi. Notiamo che le coppie $(i, 401 - i)$ e $(i + 1, 400 - i)$ hanno la stessa somma. Basta quindi assegnare ad Aldobrando le coppie con i pari da 1 a 200 (si tratta di 100 coppie, quindi 200 lingotti; ognuna ha peso totale 401 , quindi Aldobrando riceve 200 lingotti e $401 \cdot 100$ grammi d'oro) e a Brienne le coppie con i dispari da 1 a 200 (si tratta ancora di 100 coppie, disgiunte dalle precedenti; il numero di lingotti è quindi ancora 200 , e il peso in oro è ancora $401 \cdot 100$).

2. Due qualsiasi pentagoni regolari nel piano sono simili fra loro. Sia P_1 un pentagono regolare di lato 1. Dato un pentagono regolare P_ℓ di lato ℓ , la similitudine fra P_1 e P_ℓ mostra che l'area di P_ℓ è ℓ^2 volte l'area di P_1 . Denotando con $S(X)$ l'area della figura piana X e applicando l'osservazione precedente al contesto del problema, otteniamo

$$\begin{aligned} S(P_{AB}) + S(P_{AC}) &= AB^2 \cdot S(P_1) + AC^2 \cdot S(P_1) \\ &= S(P_1) \cdot (AB^2 + AC^2) \\ &= S(P_1) \cdot BC^2 = S(P_{BC}), \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Pitagora.

3. Supponiamo che $a, a+1, a+2$ siano interi positivi, con $a \geq 2$, i cui fattori primi sono solo 2 e 3. Fra tre interi positivi consecutivi, esattamente uno è divisibile per 3. Ne segue che gli altri due non possono essere divisibili per 3, e quindi si fattorizzano usando solo il primo 2, ovvero sono potenze di 2. Dato che le potenze di due maggiori di uno sono pari (e i numeri che stiamo considerando sono maggiori di 1), devono distare fra loro almeno di due unità. Fra gli interi $a, a+1, a+2$ ci sono quindi due potenze di 2 a distanza 2 (e quindi sono proprio a e $a+2$): studiamo allora l'equazione $2^x - 2^y = 2$. Chiaramente si deve avere $x > y$. Si osservi che se $y \geq 2$ abbiamo che sia 2^x , sia 2^y sono divisibili per 4. Allora anche la loro differenza dovrebbe essere divisibile per 4, ma questo è assurdo perché la loro differenza è 2. Ne concludiamo che $y = 1$, cioè che $a = 2$. L'unica terna con la proprietà voluta è quindi 2, 3, 4, esclusa dal testo. Concludiamo che non esistono altre terne con la proprietà data.

4. (a) Sia (a, b, c) una soluzione del sistema. Consideriamo il polinomio

$$p(t) := (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc = t^3 + 3t^2 - 6t - 8.$$

Ne segue che a, b, c sono radici di questo polinomio. È facile notare che $p(-1) = 0$; facendo la divisione troviamo $p(t) = (t+1)(t^2 + 2t - 8)$, e da qui facilmente $p(t) = (t+1)(t+4)(t-2)$. I numeri reali a, b, c sono quindi $-1, -4, 2$ in qualche ordine: ci sono sei terne ordinate che risolvono il sistema, ovvero

$$(-1, -4, 2), (-1, 2, -4), (-4, -1, 2), (-4, 2, -1), (2, -4, -1), (2, -1, -4).$$

Nota. Non è necessario avere l'idea di considerare il polinomio $p(t)$. Partendo dal sistema si può direttamente ottenere $bc = 8/a$ dall'ultima equazione, $b+c = -3-a$ dalla prima, e sostituire nella seconda, ottenendo

$$-6 = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(-3-a) + \frac{8}{a}.$$

Moltiplicando tutto per a arriviamo a

$$-6a = a^2(-3-a) + 8 \iff a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = 0,$$

che è equivalente a quanto trovato sopra.

- (b) Vogliamo ricondurci ad una situazione simile a quella del primo punto. In particolare, osserviamo che

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 26 + 2(ab+bc+ca),$$

da cui deduciamo $ab + bc + ca = -13$, e

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc \\ &= -36 + 3((a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc) + 6abc \\ &= -36 + 3(0 \cdot (-13) - 3abc) + 6abc \\ &= -36 - 3abc, \end{aligned}$$

da cui deduciamo $abc = -12$. Scopriamo allora che ogni soluzione del sistema di partenza è anche soluzione del sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = -13 \\ abc = -12. \end{cases}$$

Procedendo come nel primo punto, troviamo che le soluzioni di questo sistema sono radici del polinomio

$$g(t) = t^3 - 13t + 12.$$

Si nota subito che $g(1) = 0$, e da qui è facile fattorizzare $g(t) = (t - 1)(t - 3)(t + 4)$. Come nel primo punto il sistema ha allora esattamente 6 soluzioni, cioè la terna $(1, 3, -4)$ e le sue permutazioni.