

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari
A.A. 2024–2025

Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica

Soluzioni

(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

10 Settembre 2024

1 Problemi

1. Aldobrando e Brienne hanno appena scoperto un tesoro! Questo consiste di 400 lingotti d'oro, dal peso di $10g, 20g, 30g, 40g, \dots, 4000g$. Dimostrare che possono spartirsi il tesoro in modo che entrambi ricevano sia lo stesso numero di lingotti, sia lo stesso peso in oro.
2. Tutti siamo familiari con il teorema di Pitagora: dato un triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (ovvero aventi come lato un cateto) è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa. Il teorema di Pentagora è invece la seguente affermazione: dato un triangolo ABC , rettangolo in A , la somma delle aree dei pentagoni regolari costruiti sui cateti AB e AC (ovvero dei pentagoni regolari aventi come lati AB e AC , rispettivamente) è equivalente all'area del pentagono regolare costruito sull'ipotenusa BC . Sapreste dimostrare il teorema di Pentagora?
3. Gli interi positivi $2, 3, 4$ si fattorizzano utilizzando solo i primi 2 e 3 . Esistono altri tre interi positivi consecutivi (il primo dei quali maggiore di 2) i cui fattori primi siano solo 2 e 3 ?
4. (a) Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ ab + bc + ca = -6 \\ abc = 8. \end{cases}$$

- (b) Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali che risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 26 \\ a^3 + b^3 + c^3 = -36. \end{cases}$$

5. Dato un intero positivo n , denotiamo con $p(n)$ il prodotto delle sue cifre nella usuale rappresentazione decimale (per esempio, $p(59) = 5 \cdot 9 = 45$ e $p(123) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$). Determinare tutti i valori interi positivi assunti dal rapporto $\frac{3p(n)}{n}$; in altre parole, determinare per quali interi positivi r l'equazione $\frac{3p(n)}{n} = r$ ha almeno una soluzione intera positiva n .
6. Sia $n \geq 2$ un intero, siano x_1, \dots, x_n interi positivi, e sia S l'insieme degli interi della forma $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$.

Esempio. Se $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 10$, l'insieme S è formato dagli otto elementi

$$1 + 2 + 10 = 13, \quad 1 + 2 - 10 = -7, \quad 1 - 2 + 10 = 9, \quad 1 - 2 - 10 = -11$$

$$-1 + 2 + 10 = 11, \quad -1 + 2 - 10 = -9, \quad -1 - 2 + 10 = 7, \quad -1 - 2 - 10 = -13.$$

Supponiamo che, come nell'esempio qui sopra, gli elementi ottenuti da tali somme e differenze siano tutti distinti, cosicché $|S| = 2^n$.

- (a) Dimostrare che la somma dei quadrati degli elementi di S è pari a 2^n volte la somma dei quadrati dei numeri x_1, \dots, x_n .
- (b) Chiamiamo T la somma dei quadrati dei numeri in S . Dimostrare che per ogni numero reale positivo a si ha

$$\#\{s \in S : |s| \geq a\} \leq \frac{T}{a^2}.$$

- (c) Dedurre che il massimo fra x_1, \dots, x_n vale almeno $\frac{2^n}{6\sqrt{n}}$.

2 Soluzioni

1. Numeriamo i lingotti da 1 a 400, con il lingotto i -esimo che pesa $10i$ grammi. Notiamo che le coppie $(i, 401 - i)$ e $(i + 1, 400 - i)$ hanno la stessa somma. Basta quindi assegnare ad Aldobrando le coppie con i pari da 1 a 200 (si tratta di 100 coppie, quindi 200 lingotti; ognuna ha peso totale 401, quindi Aldobrando riceve 200 lingotti e $401 \cdot 100$ grammi d'oro) e a Brienne le coppie con i dispari da i a 200 (si tratta ancora di 100 coppie, disgiunte dalle precedenti; il numero di lingotti è quindi ancora 200, e il peso in oro è ancora $401 \cdot 100$).
2. Due qualsiasi pentagoni regolari nel piano sono simili fra loro. Sia P_1 un pentagono regolare di lato 1. Dato un pentagono regolare P_ℓ di lato ℓ , la similitudine fra P_1 e P_ℓ mostra che l'area di P_ℓ è ℓ^2 volte l'area di P_1 . Denotando con $S(X)$ l'area della figura piana X e applicando l'osservazione precedente al contesto del problema, otteniamo

$$\begin{aligned} S(P_{AB}) + S(P_{AC}) &= AB^2 \cdot S(P_1) + AC^2 \cdot S(P_1) \\ &= S(P_1) \cdot (AB^2 + AC^2) \\ &= S(P_1) \cdot BC^2 = S(P_{BC}), \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Pitagora.

3. Supponiamo che $a, a + 1, a + 2$ siano interi positivi, con $a \geq 2$, i cui fattori primi sono solo 2 e 3. Fra tre interi positivi consecutivi, esattamente uno è divisibile per 3. Ne segue che gli altri due non possono essere divisibili per 3, e quindi si fattorizzano usando solo il primo 2, ovvero sono potenze di 2. Dato che le potenze di due maggiori di uno sono pari (e i numeri che stiamo considerando sono maggiori di 1), devono distare fra loro almeno di due unità. Fra gli interi $a, a + 1, a + 2$ ci sono quindi due potenze di 2 a distanza 2 (e quindi sono proprio a e $a + 2$): studiamo allora l'equazione $2^x - 2^y = 2$. Chiaramente si deve avere $x > y$. Si osservi che se $y \geq 2$ abbiamo che sia 2^x , sia 2^y sono divisibili per 4. Allora anche la loro differenza dovrebbe essere divisibile per 4, ma questo è assurdo perché la loro differenza è 2. Ne concludiamo che $y = 1$, cioè che $a = 2$. L'unica terna con la proprietà voluta è quindi $2, 3, 4$, esclusa dal testo. Concludiamo che non esistono altre terne con la proprietà data.

4. (a) Sia (a, b, c) una soluzione del sistema. Consideriamo il polinomio

$$p(t) := (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc = t^3 + 3t^2 - 6t - 8.$$

Ne segue che a, b, c sono radici di questo polinomio. È facile notare che $p(-1) = 0$; facendo la divisione troviamo $p(t) = (t+1)(t^2 + 2t - 8)$, e da qui facilmente $p(t) = (t+1)(t+4)(t-2)$. I numeri reali a, b, c sono quindi $-1, -4, 2$ in qualche ordine: ci sono sei terne ordinate che risolvono il sistema, ovvero

$$(-1, -4, 2), (-1, 2, -4), (-4, -1, 2), (-4, 2, -1), (2, -4, -1), (2, -1, -4).$$

Nota. Non è necessario avere l'idea di considerare il polinomio $p(t)$. Partendo dal sistema si può direttamente ottenere $bc = 8/a$ dall'ultima equazione, $b+c = -3-a$ dalla prima, e sostituire nella seconda, ottenendo

$$-6 = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(-3-a) + \frac{8}{a}.$$

Moltiplicando tutto per a arriviamo a

$$-6a = a^2(-3-a) + 8 \iff a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = 0,$$

che è equivalente a quanto trovato sopra.

- (b) Vogliamo ricondurci ad una situazione simile a quella del primo punto. In particolare, osserviamo che

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 26 + 2(ab+bc+ca),$$

da cui deduciamo $ab+bc+ca = -13$, e

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc \\ &= -36 + 3((a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc) + 6abc \\ &= -36 + 3(0 \cdot (-13) - 3abc) + 6abc \\ &= -36 - 3abc, \end{aligned}$$

da cui deduciamo $abc = -12$. Scopriamo allora che ogni soluzione del sistema di partenza è anche soluzione del sistema

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ ab+bc+ca = -13 \\ abc = -12. \end{cases}$$

Procedendo come nel primo punto, troviamo che le soluzioni di questo sistema sono radici del polinomio

$$g(t) = t^3 - 13t + 12.$$

Si nota subito che $g(1) = 0$, e da qui è facile fattorizzare $g(t) = (t-1)(t-3)(t+4)$. Come nel primo punto il sistema ha allora esattamente 6 soluzioni, cioè la terna $(1, 3, -4)$ e le sue permutazioni.

5. Affermiamo che i valori interi assunti dal rapporto $\frac{3p(n)}{n}$ sono precisamente $1, 2, 3$. Mostriamo intanto che rapporti più grandi non sono realizzati. Scriviamo il numero n come $c_d c_{d-1} \cdots c_0$, dove c_0 è la cifra delle unità, c_1 quella delle decine, e così via, fino alla cifra c_d , corrispondente a 10^d . Per un tale numero abbiamo certamente $n \geq c_d \cdot 10^d$, e quindi (siccome ogni cifra vale al massimo 9) otteniamo

$$\frac{3p(n)}{n} = \frac{3c_0 \cdot c_1 \cdots c_{d-1} \cdot c_d}{n} \leq \frac{3 \cdot 9 \cdot 9 \cdots 9 \cdot c_d}{c_d \cdot 10^d} = 3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^d \leq 3.$$

Basta ora trovare esempi che realizzino $r = 1, 2, 3$. Per $r = 3$ è sufficiente prendere un qualsiasi numero di una sola cifra. Per $r = 2$ possiamo prendere $n = 48$, che dà in effetti $\frac{3p(n)}{n} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{48} = \frac{96}{48} = 2$, e per $r = 1$ è sufficiente scegliere $n = 15$, che dà in effetti $\frac{3p(n)}{n} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{15} = 1$.

6. (a) Procediamo per induzione su n . Nel caso $n = 1$ c'è un solo numero, x_1 , e S contiene $+x_1$ e $-x_1$. La somma dei quadrati dei suoi elementi è $(x_1)^2 + (-x_1)^2 = 2^1 \cdot x_1^2$, come voluto. Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo n e dimostriamola per $n + 1$. Accoppiamo gli elementi di S mettendo insieme

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n + x_{n+1} \quad \text{e} \quad \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n - x_{n+1}.$$

Chiamando per semplicità $A = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$, la somma dei quadrati di questi elementi è

$$(A + x_{n+1})^2 + (A - x_{n+1})^2 = A^2 + 2Ax_{n+1} + x_{n+1}^2 + A^2 - 2Ax_{n+1} + x_{n+1}^2 = 2A^2 + 2x_{n+1}^2.$$

Sommando su tutte le coppie di questo tipo (che sono 2^n) otteniamo 2^n volte $2x_{n+1}^2$, per un totale di $2^{n+1}x_{n+1}^2$, e il doppio della somma dei quadrati di tutti gli elementi della forma $\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$. Per ipotesi induttiva, tale somma di quadrati è uguale a $2^n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$. Mettendo tutto insieme, la somma dei quadrati degli elementi di S è quindi

$$2^{n+1}x_{n+1}^2 + 2 \cdot 2^n \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = 2^{n+1}(x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2),$$

come voluto.

Nota. Tecnicamente, per far funzionare l'induzione occorre dimostrare un'affermazione leggermente più generale: non si suppone che $\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$ siano tutti distinti, e si contano gli eventuali elementi ripetuti con la rispettiva molteplicità.

- (b) Sia $b = \#\{s \in S : |s| \geq a\}$. Quando facciamo la somma dei quadrati degli elementi di S (che è una somma di quantità positive), ogni $s \in S$ con $|s| \geq a$ contribuisce almeno $|s|^2 \geq a^2$, e quindi questi elementi nel complesso contribuiscono almeno $b \cdot a^2$. Siccome la somma totale è T , si deve avere $ba^2 \leq T$, cioè

$$\#\{s \in S : |s| \geq a\} \leq \frac{T}{a^2},$$

come voluto.

- (c) La disuguaglianza voluta è banale per $n = 2, 3$, in quanto in tal caso $\frac{2^n}{6\sqrt{n}} < 1$ per $n = 2, 3$. Supporremo quindi $n \geq 4$; questo sarà usato solo alla fine della soluzione. Consideriamo il complementare dell'insieme del punto precedente. Siccome $|S| = 2^n$ per ipotesi, abbiamo

$$\#\{s \in S : |s| < a\} = 2^n - \#\{s \in S : |s| \geq a\} \geq 2^n - \frac{T}{a^2},$$

ed inoltre ovviamente gli elementi di S con valore assoluto al massimo a sono al massimo $2a + 1$, perché questo è il numero totale di interi nell'intervallo $[-a, a]$ (quando a è intero). Abbiamo allora ottenuto la disuguaglianza

$$2a + 1 \geq 2^n - \frac{T}{a^2},$$

valida per ogni numero reale positivo a . Convienne riscrivere questa disuguaglianza nella forma

$$T \geq (2^n - 2a - 1) \cdot a^2.$$

Abbiamo dimostrato nel primo punto che $T = 2^n U$, dove U è la somma dei quadrati dei numeri x_1, \dots, x_n . Chiamiamo inoltre M il massimo dei numeri x_1, \dots, x_n . Abbiamo quindi

$$T = 2^n U = 2^n (x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq 2^n \cdot n \cdot M^2.$$

Combinando le ultime due disuguaglianze otteniamo quindi

$$2^n \cdot n \cdot M^2 \geq (2^n - 2a - 1) \cdot a^2,$$

ovvero

$$M^2 \geq \frac{(2^n - 2a - 1) \cdot a^2}{n \cdot 2^n} \quad (1)$$

per ogni reale positivo a . Si tratta ora di scegliere opportunamente a , massimizzando il lato destro di questa disuguaglianza. Per fare le cose precisamente, possiamo derivare in a , scoprendo che il massimo si ha in corrispondenza del valore di $a > 0$ che risolve l'equazione

$$-2a^2 + (2^n - 2a - 1) \cdot 2a = 0,$$

ovvero

$$a = \frac{2^n - 1}{3}.$$

Essendo più approssimativi (sarà sufficiente per risolvere il nostro problema) possiamo prendere $a = \frac{2^n}{3}$. Sostituendo in (1) troviamo

$$M^2 \geq \frac{(2^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n - 1) \cdot \frac{2^{2n}}{9}}{n \cdot 2^n} = \frac{(\frac{1}{3} \cdot 2^n - 1) 2^n}{9n} \geq \frac{2^n/4 \cdot 2^n}{9n} = \frac{2^{2n}}{36n},$$

e cioè $M \geq \frac{2^n}{6\sqrt{n}}$, come dovevamo dimostrare. Si osservi che abbiamo usato la disuguaglianza

$$\frac{1}{3}2^n - 1 \geq \frac{1}{4}2^n \iff \frac{1}{12}2^n \geq 1,$$

che è vera in quanto $n \geq 4$, come supposto all'inizio di questa soluzione.