

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
A.A. 2021–2022
(Corsi di Laurea di Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Soluzioni degli Esercizi

Esercizio 1. Gli spigoli di un cubo sono numerati da 1 a 12. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

Soluzione. Ciascuno spigolo è comune a esattamente due vertici del cubo. Pertanto la somma dei numeri sugli 8 vertici del cubo è uguale al doppio della somma dei numeri sui 12 spigoli del cubo, cioè al doppio della somma dei numeri naturali da 1 a 12. Quindi

$$\text{Somma dei numeri sui vertici del cubo} = 2 \cdot (1 + \dots + 12) = 156.$$

Dato che 156 non è divisibile per 8, i numeri sugli 8 vertici del cubo non possono essere tutti uguali.

Esercizio 2. (a) 9 sedie sono poste, equidistanziate, intorno a un tavolo circolare. Sul tavolo sono posizionati 9 segnaposto con i nomi (tutti diversi tra loro) degli ospiti. Tutti i 9 ospiti vanno a sedersi a tavola, ma vedono i segnaposto solo dopo essersi seduti e si accorgono che nessuno è seduto al posto assegnato. Si dimostri che è possibile ruotare il tavolo (senza far alzare gli ospiti) in modo tale che almeno due degli ospiti siano seduti contemporaneamente al posto assegnato.

(b) Si dia un esempio di una sistemazione dei 9 ospiti tale che uno e uno solo di essi sia seduto al posto assegnato e tale che nessuna rotazione del tavolo sistemi al posto assegnato più di una persona.

Soluzione. Indichiamo i posti al tavolo con i numeri da 0 a 8, in senso orario e indichiamo gli ospiti con i numeri corrispondenti, secondo il posto assegnato. Chiamiamo p_i la posizione occupata (senza ruotare il tavolo) dall'ospite a cui era stato assegnato il posto i . Ad esempio, se scriviamo $p_3 = 7$ significa che l'ospite a cui era stato assegnato il posto 3 è andato a sedersi al posto 7. Chiamiamo N_0 il numero degli ospiti che sono seduti al posto assegnato senza ruotare il tavolo, N_1 il numero degli ospiti che sono seduti al posto assegnato se ruotiamo il tavolo di $1/9$ di giro in senso orario, N_2 il numero degli ospiti che sono seduti al posto assegnato se ruotiamo il tavolo di $2/9$ di giro in senso orario e così via fino a N_8 . In modo più formale possiamo scrivere

$$N_k := \#\{i = 0, \dots, 8 : i + k - p_i \text{ è un multiplo di } 9\}, \quad k = 0, \dots, 8.$$

(dove il simbolo $\#$ indica la cardinalità dell'insieme).

(a) Ogni ospite è seduto al posto assegnato con una e una sola tra le 9 possibili rotazioni del tavolo, pertanto si ha $N_0 + N_1 + \dots + N_8 = 9$. Per ipotesi, senza ruotare il tavolo nessun ospite è seduto al posto assegnato, cioè $N_0 = 0$. Di conseguenza, $N_1 + \dots + N_8 = 9$. Abbiamo 8 numeri interi la cui somma dà 9, pertanto almeno uno di loro dev'essere maggiore o uguale a 2. In altre parole, esiste una rotazione del tavolo che sistema al posto assegnato almeno due ospiti contemporaneamente.

(b) Possiamo ad esempio procedere così. Sistemiamo correttamente l'ospite 0, cioè $p_0 = 0$, e poi sistemiamo l'ospite 1 a distanza di 2 posti in senso orario, l'ospite 2 a distanza di altri 2 posti in senso orario, e così via, cioè

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 6, \quad p_4 = 8, \quad p_5 = 1, \quad p_6 = 3, \quad p_7 = 5, \quad p_8 = 7.$$

Questa disposizione sistema correttamente uno e un solo ospite con qualsiasi rotazione (cioè $N_0 = \dots = N_8 = 1$): ruotando il tavolo di $k/9$ in senso orario, l'unico ospite seduto al posto corretto

è l'ospite a cui era stato assegnato il posto k . Infatti, come è immediato verificare, $2k - p_k$ è un multiplo di 9 per ogni $k = 0, \dots, 8$.

Esercizio 3. Sui lati AB e BC del quadrilatero convesso $ABCD$ si trovano rispettivamente i punti M e N , con la proprietà che ciascuno dei due segmenti AN e CM divide il quadrilatero $ABCD$ in due parti di area uguale. Si dimostri che il segmento MN incontra la diagonale BD nel punto medio di BD .

Soluzione. Usiamo la notazione con le parentesi quadre per indicare l'area di un poligono. Ad esempio, indichiamo con $[ABC]$ l'area del triangolo ABC .

Per ipotesi si ha $[MADC] = [NADC] = [ABCD]/2$. Ne segue che $[ANC] = [AMC]$, e quindi la retta MN è parallela alla retta AC .

Sia m la retta passante per D e parallela a MN e AC . Sia P il punto d'intersezione di m con il prolungamento di BA e sia Q il punto d'intersezione di m con il prolungamento di BC . Allora

$$[MPC] = [MAC] + [CAP] = [MAC] + [CAD] = [MADC] = [BMC],$$

da cui segue che $\overline{BM} = \overline{MP}$. Analogamente si trova $\overline{BN} = \overline{NQ}$.

Il segmento MN congiunge quindi i punti medi dei segmenti BP , BQ e, come conseguenza del teorema di Talete, passa anche per il punto medio del segmento BD .

Esercizio 4. Dimostrare che nessun numero della forma $a^3 - 2a + 1$, dove $a \geq 2$ è un numero intero, è un quadrato perfetto.

Soluzione. Si ha $a^3 - 2a + 1 = (a-1)(a^2 + a - 1)$. Il numero $a-1$ è un intero positivo in quanto $a \geq 2$. Osserviamo che, se p è un numero primo che divide $a-1$, allora p divide $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$ e pertanto p non divide $a^2 + a - 1 = (a-1)(a+2) + 1$.

Ora, se $a-1$ non è un quadrato perfetto, esiste un primo p che compare nella scomposizione di $a-1$ in fattori primi con esponente dispari. Per quanto osservato sopra, p compare con lo stesso esponente dispari anche nella scomposizione in fattori primi di $a^3 - 2a + 1$, che quindi non può essere un quadrato perfetto.

Supponiamo invece che $a-1$ sia un quadrato perfetto. Allora $a^3 - 2a + 1 = (a-1)(a^2 + a - 1)$ è un quadrato perfetto se e solo se $a^2 + a - 1$ è un quadrato perfetto. Ma si ha

$$a^2 < a^2 + a - 1 < a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2.$$

Poichè $a^2 + a - 1$ è strettamente compreso tra due quadrati perfetti consecutivi, non può essere esso stesso un quadrato perfetto.

Esercizio 5. Siano a, b, c tre numeri reali positivi. Si dimostri che

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c}.$$

Soluzione. Data la simmetria del problema in a, b, c , possiamo supporre, senza perdere generalità, che valga $a \geq b \geq c$. Allora si ha $a - b \geq 0$, $b - c \geq 0$, $a - c \geq 0$ e $\frac{a}{b} \geq 1$, $\frac{a}{c} \geq 1$, $\frac{b}{c} \geq 1$. Di conseguenza

$$\frac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq 1.$$

Esercizio 6. Si determinino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Ponendo $x = 0$ si trova

$$(1) \quad f(f(y)) = f(0)^2 + y \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

La funzione al secondo membro è iniettiva e suriettiva, pertanto $f \circ f$ è iniettiva e suriettiva. Ne segue che f è iniettiva e suriettiva, cioè f è una funzione invertibile su \mathbb{R} .

Sia ora t l'unico numero reale tale che $f(t) = 0$. Sostituendo $x = t$ nell'equazione funzionale si ottiene

$$(2) \quad f(f(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Usando (2) (con x al posto di y) e mettendo $f(x)$ al posto di x nell'equazione funzionale di partenza si deduce

$$(3) \quad f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ora, confrontando i secondi membri di (3) e dell'equazione funzionale di partenza si deduce

$$(4) \quad f(x)^2 = x^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Fissando ad esempio $x = 1$, si ha quindi $f(1) = 1$ oppure $f(1) = -1$.

Se $f(1) = 1$, allora la sostituzione $x = 1$ nell'equazione funzionale di partenza dà $f(1 + f(y)) = 1 + y$. Elevando al quadrato e usando (4) si ottiene $(1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$. Svolgendo il quadrato di entrambi i membri e usando nuovamente (4) si deduce $f(y) = y$ per ogni y reale.

In modo del tutto analogo si mostra che se $f(1) = -1$ allora $f(y) = -y$ per ogni y reale.

Abbiamo così dimostrato che $f(y) = y$ e $f(y) = -y$ sono le uniche soluzioni possibili dell'equazione funzionale di partenza. D'altronde, si verifica immediatamente che entrambe le funzioni $f(y) = y$ e $f(y) = -y$ verificano l'equazione funzionale di partenza. Pertanto esse sono le uniche due soluzioni.