

SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO DEI CORSI ORDINARI
A.A. 2021-2022
CLASSE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI
PROVA DI FISICA

Soluzione dell'esercizio 1

L'equazione del moto per i due pendoli è data da $\frac{dL}{dt} = M$; L è la componente del momento angolare perpendicolare al piano del moto ($L = I\omega = I\frac{d\theta}{dt}$, con I momento di inerzia del pendolo) e M è la corrispondente componente del momento meccanico, dovuto alla forza di gravità, che possiamo immaginare applicata al centro di massa delle barrette:

$$I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl/2 \sin(\theta) \quad (1)$$

$$I_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mgl/2 + mgl/2) \sin(\theta) \quad ; \quad (2)$$

I_1 e I_2 , i momenti d'inerzia dei due sistemi rispetto al punto di rotazione, valgono rispettivamente:

$$I_1 = \frac{1}{3}ml^2 \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{1}{3}ml^2 + m(l/2)^2 = \frac{7}{12}ml^2 \quad . \quad (4)$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l} \sin(\theta) = -\omega_1^2 \sin(\theta) \quad (5)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{12g}{7l} \sin(\theta) = -\omega_2^2 \sin(\theta) \quad , \quad (6)$$

con le definizioni $\omega_1 = \sqrt{3g/(2l)}$ e $\omega_2 = \sqrt{12g/(7l)}$.

Nel caso di oscillazioni di piccola ampiezza, possiamo approssimare $\sin(\theta) \approx \theta$, e quindi considerare i due pendoli come oscillatori armonici di nota pulsazione. In tal caso, il tempo necessario a raggiungere la posizione verticale, pari a un quarto del periodo del moto, è

$$T_1 = \frac{2\pi}{4\omega_1} \quad ; \quad (7)$$

una espressione analoga vale per il secondo pendolo con $\omega_1 \longleftrightarrow \omega_2$.

Nel caso che i pendoli siano lasciati liberi di oscillare con una inclinazione iniziale di 90° l'approssimazione di piccole oscillazioni non è valida e le equazioni del moto non possono essere risolte in forma analitica chiusa.

Per calcolare il rapporto tra i tempi di caduta dei due pendoli, possiamo però ragionare nel modo seguente. Supponiamo di definire una nuova unità di tempo τ riscalata rispetto a quella normale: $t = \alpha\tau$. Se adottiamo questa nuova definizione la velocità angolare definita con la nuova scala di tempo ($\omega_\tau = dv/d\tau$) è legata a quella ordinaria (ω) dalla relazione $\omega = \omega_\tau/\alpha$: per convincersi di tale relazione, supponiamo che $\alpha = 2$ per cui una unità di tempo normale equivale a due unità di tempo τ . E' quindi evidente che in tal caso si debba avere $\omega = \omega_\tau/2$. Con un analogo ragionamento, definendo $a_\tau = d^2\theta/d\tau^2$, otteniamo che $a = a_\tau/\alpha^2$. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando nozioni elementari di analisi matematica, considerando che $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d\theta}{d\tau}$.

Riprendiamo ora le equazioni del moto dei due pendoli, riscrivendole in termini di τ_1 ($t = \alpha_1\tau_1$) e τ_2 ($t = \alpha_2\tau_2$), scelti indipendentemente nei due casi. Abbiamo:

$$\frac{1}{\alpha_1^2} \frac{d^2\theta}{d\tau_1^2} = -\omega_1^2 \sin(\theta) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\alpha_2^2} \frac{d^2\theta}{d\tau_2^2} = -\omega_2^2 \sin(\theta) \quad , \quad (9)$$

Scegliamo ora $\alpha_1 = 1$ (e quindi $\tau_1 = t$) e $\alpha_2 = \omega_1/\omega_2$. Con questa scelta, abbiamo:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau_1^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_1^2 \sin(\theta) \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau_2^2} = -\omega_1^2 \sin(\theta) \quad , \quad (11)$$

Dunque, l'equazione del moto del secondo pendolo, scritta in funzione del tempo riscalato τ_2 è la stessa di quella del primo pendolo, scritta in unità ordinarie di tempo. Supponiamo di conoscere la soluzione dell'equazione del moto del primo pendolo, ad esempio calcolata per via numerica, e da essa ricavare che il tempo di caduta del primo pendolo è t_1^* ; per il secondo pendolo, definito τ_2^* il tempo di caduta in unità τ , avremo quindi $\tau_2^* = t_1^*$. Ricordando che $t = \alpha_2\tau_2$ otteniamo immediatamente che

$$t_2^* = \alpha_2\tau_2^* = \alpha_2 t_1^* \quad (12)$$

e quindi

$$\frac{t_2^*}{t_1^*} = \alpha_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad . \quad (13)$$

Soluzione dell'esercizio 2

L' unità di misura dell' impulso specifico (che indichiamo con I) è quella di una forza divisa per il rapporto tra una massa e un tempo. Abbiamo quindi

$$[I] = \frac{[F]}{[m]/[T]} = \frac{[mLT^{-2}]}{[mT^{-1}]} = \frac{[L]}{[T]} \quad ;$$

l' unità di misura di I è quindi l'unità di misura della velocità. Utilizzando i valori della spinta dei motori e del consumo istantaneo di combustibile forniti nella tabella otteniamo immediatamente che

$$I = \frac{3.4 \cdot 10^7 \text{ N}}{1.3 \cdot 10^4 \text{ Kg/sec}} \approx 2600 \text{ m/sec} \quad . \quad (14)$$

A un generico istante t , il razzo, la cui massa $m(t)$ è pari alla massa al decollo meno la massa del combustibile bruciato fino a quell'istante, è sottoposto alla forza di gravità e alla spinta dei suoi motori. Chiamando m_0 la massa totale al decollo, F_s la spinta (costante nel tempo) dei motori e indicando con α il consumo istantaneo di combustibile, avremo che $m(t) = m_0 - \alpha t$ e quindi:

$$m(t) a(t) = m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t) g + F_s \quad (15)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{F_s}{m_0 - \alpha t} \quad (16)$$

All' accensione dei motori la massa è pari alla massa al decollo; sostituendo i valori forniti dalla tabella, otteniamo un valore di accelerazione di $\approx 1.9 \text{ m/sec}^2$.

I valori dell' accelerazione agli istanti successivi, richiesti dal problema, si ottengono sostituendo i corrispondenti valori numerici nella Eq. 16 e sono riassunti nella seguente tabella.

Istante temporale (t)	Accelerazione ($-g + \frac{F_s}{m_0 - \alpha t}$)
$t_0 = 0 \text{ sec}$	$a_0 = 1.9 \text{ m/sec}^2$
$t_1 = 42 \text{ sec}$	$a_1 = 4.6 \text{ m/sec}^2$
$t_2 = 84 \text{ sec}$	$a_2 = 10.0 \text{ m/sec}^2$
$t_3 = 126 \text{ sec}$	$a_3 = 17.1 \text{ m/sec}^2$
$t_4 = 168 \text{ sec}$	$a_4 = 37.6 \text{ m/sec}^2$

Per calcolare la velocità del razzo al momento in cui si spengono i motori, poichè l'accelerazione varia nel tempo, si devono sommare gli incrementi di velocità dovuti all' accelerazione in intervalli temporali molto brevi.

Una stima per difetto si ottiene immaginando che, in ognuno dei 4 intervalli temporali definiti nella precedente tabella, l'accelerazione sia uguale al suo valore minimo in tale intervallo; un' approssimazione per eccesso si ottiene immaginando che l'accelerazione sia quella massima nel corrispondente intervallo. Definendo $\Delta T = 42 \text{ sec}$ la durata di ogni intervallo abbiamo

$$v_{inf} = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)\Delta T \approx 1411 \text{ m/sec} \quad (17)$$

$$v_{sup} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\Delta T \approx 2911 \text{ m/sec} \quad (18)$$

$$(19)$$

Si può ottenere una approssimazione significativamente migliore considerando, in ognuno degli intervalli, un valore di accelerazione pari al valor medio nell' intervallo stesso. È facile vedere che in questo caso abbiamo

$$v_{imp} = (a_0/2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4/2)\Delta T \approx 2161 \text{ m/sec} \quad (20)$$

È possibile anche integrare l'equazione differenziale Eq. 16, ottenendo:

$$\int_0^t \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t \left[-g + \frac{F_s}{m_0 - \alpha t} \right] dt \quad (21)$$

Calcolando gli integrali otteniamo:

$$v(t) - v(0) = v(t) = -g t + \frac{F_s}{\alpha} \log\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) \quad ; \quad (22)$$

se calcoliamo tale espressione per $t = 168 \text{ sec}$ otteniamo $v = 2010 \text{ m/sec}$; con l'approssimazione di Eq. 20 si commette quindi un errore inferiore al 10%.

Soluzione dell'esercizio 3

Supponiamo senza perdita di generalità che la differenza di potenziale ΔV sia applicata tra i vertici¹ A e H del cubo. È comodo assegnare un potenziale ΔV al vertice A e un potenziale nullo al punto H.

La corrente che entra nel circuito dal punto A si distribuisce in maniera uguale sui rami AB, AC, AE per simmetria (infatti, i tre spigoli possono essere mandati uno sull'altro tramite rotazioni intorno all'asse AH che trasformano il cubo in se stesso). Sia i_0 il valore della corrente in ognuno dei rami sopra citati. In maniera del tutto analoga, la corrente che scorre in ognuno dei rami HF, HG e HD ha pure intensità i_0 .

Ancora per simmetria la corrente che entra (ad esempio) nel vertice C si distribuisce in modo uguale sui rami CD e CG; utilizzando la legge di Ohm, possiamo quindi scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$V_B = V_C = V_E = \Delta V - i_0 R \quad (23)$$

$$V_D = V_F = V_G = i_0 R \quad (24)$$

$$V_B - V_D = \frac{i_0}{2} R \quad ; \quad (25)$$

Sottraiamo la seconda equazione dalla prima, ottenendo:

$$V_B - V_D = \Delta V - 2i_0 R \quad (26)$$

$$V_B - V_D = \frac{i_0}{2} R \quad , \quad (27)$$

da cui otteniamo immediatamente che

$$i_0 = \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{R} \quad , \quad (28)$$

che ci fornisce il valore della corrente che scorre nei rami AB, AC, AE, DH, FH, GH; negli altri sei rami del circuito scorre invece una corrente $i_0/2$.

La corrente totale che entra nel circuito al vertice A e ne esce dal vertice H è quindi $i = 3i_0 = (6/5) (\Delta V/R)$ e la resistenza equivalente del circuito è data da $R_{eq} = 5R/6$.

Soluzione dell'esercizio 4

Il circuito costituito dai due binari, dalla resistenza che li collega e dalla barretta è attraversato dal campo magnetico B . Il flusso del campo magnetico concatenato al circuito,

¹Nel testo dell'esercizio è stato scritto per errore che la differenza di potenziale è applicata a due "spigoli" opposti. Si deve quindi sostituire nel testo, come per altro comunicato a voce ai partecipanti al concorso durante la prova scritta, "vertici" al posto di "spigoli".

Φ_B , è pari all' intensità del campo moltiplicata per l'area del circuito. La variazione di tale flusso per unità di tempo $\frac{d\Phi_B}{dt}$, dovuta al fatto che la barretta, muovendosi, modifica l'area del circuito, è dunque $BLv(t)$. Nel circuito si sviluppa quindi una forza elettromotrice $E(t)$, data da:

$$E(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv(t) \quad ;$$

quindi, per la legge di Ohm, nel circuito scorre una corrente $i(t) = BLv(t)/R$.

La barretta risente quindi, oltre alla forza di gravità, di una forza di intensità

$$F_m(t) = i(t)LB = \frac{(BL)^2}{R}v(t) \quad , \quad (29)$$

orientata, per la legge di Lenz, in direzione opposta a quella della velocità. L'equazione del moto della barretta è quindi:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - \frac{(BL)^2}{R}v(t) \quad , \quad (30)$$

ovvero:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{(BL)^2}{mR}v(t) \quad . \quad (31)$$

Al tempo iniziale, quando la barretta è ancora ferma, la sua accelerazione è pari a g .

Man mano che la velocità della barretta aumenta la forza di origine magnetica si oppone al moto; per tempi sufficientemente grandi l'accelerazione si ridurrà a 0; dall' equazione del moto otteniamo quindi che:

$$-g - \frac{(BL)^2}{mR}v(\rightarrow \infty) = 0 \quad , \quad (32)$$

e quindi

$$v(t \rightarrow \infty) = -\frac{mR}{(BL)^2}g \quad . \quad (33)$$

Dall'analisi dimensionale della Eq. 31 risulta evidente che la quantità $\frac{mR}{(BL)^2}$ deve avere le dimensioni di un tempo; questa affermazione può essere facilmente verificata tenendo conto delle unità di misura di tutte le quantità presenti.

È quindi naturale prendere tale quantità come la scala temporale tipica del moto, per cui il tempo necessario perchè la barretta raggiunga una velocità prossima a quella asintotica è $t_\infty \approx \frac{mR}{(BL)^2}$.

Se il campo magnetico è molto piccolo, t_∞ diventa molto grande; questo è ragionevole, in quanto in questo caso abbiamo a che fare con un moto quasi uniformemente accelerato, che non raggiunge mai una velocità limite. Al contrario, per valori molto alti del campo magnetico, t_∞ diventa molto piccolo in quanto la forza magnetica diventa molto intensa e l'accelerazione della barretta si riduce a 0 per velocità molto basse.

Soluzione dell'esercizio 5

L'equazione dell'ampiezza di un onda circolare di fissata lunghezza d'onda e frequenza si scrive:

$$A(r, t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}r - \frac{2\pi}{T}t\right) \quad (34)$$

Utilizziamo un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x allineato alla scogliera e origine nel punto di mezzo tra le due aperture. Il sistema di onde generate nel tratto di mare tra scogliera e costa è quindi descritto, per un punto di coordinate (x, D) lungo la linea di costa, da

$$A(x, y, t) = A_0 \left\{ \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x-L)^2 + D^2} - \frac{2\pi}{T} t \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x+L)^2 + D^2} - \frac{2\pi}{T} t \right) \right\} \quad (35)$$

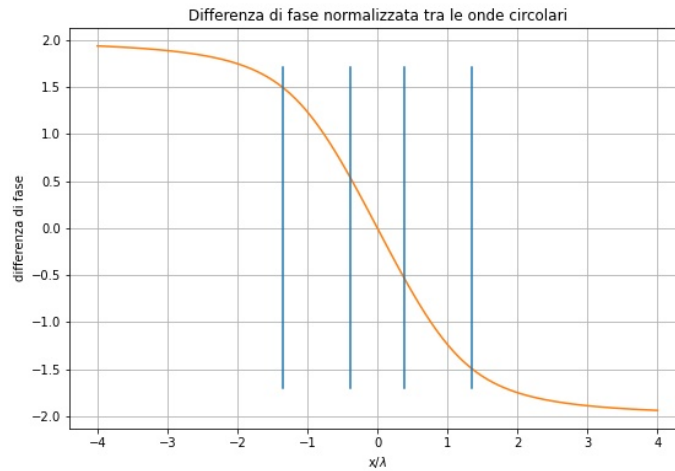
L'onda avrà ampiezza nulla nei punti della costa in cui, ad ogni istante di tempo, gli argomenti delle due funzioni seno differiscono tra di loro per un multiplo dispari di π , quando cioè:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x-L)^2 + D^2} - \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x+L)^2 + D^2} = \pm(2n+1)\pi \quad , \quad (36)$$

con $n = 0, 1, \dots$. Conviene semplificare questa espressione nel modo seguente, usando variabili adimensionali:

$$\sqrt{(x/\lambda - L/\lambda)^2 + (D/\lambda)^2} - \sqrt{(x/\lambda + L/\lambda)^2 + (D/\lambda)^2} = \pm(n + 1/2) \quad . \quad (37)$$

La figura seguente illustra la funzione corrispondente al membro a sinistra dell'uguale in Eq. 37 nel caso, proposto dal problema, in cui $D = L = \lambda$, graficata in funzione di x/λ . Ci sono quindi 4 posizioni lungo la linea di costa, simmetriche rispetto al punto di mezzo tra le due fenditure, in cui l'onda ha sempre ampiezza nulla, corrispondenti a $n = 0$ e $n = 1$, per $x/\lambda \approx \pm 0.4$, $x/\lambda \approx \pm 1.3$.



Soluzione dell'esercizio 6

Dobbiamo scaldare l'acqua del bollitore fino a farla raggiungere la temperatura di ebollizione di 100°C . Il calore specifico c_s dell'acqua è approssimativamente $1 \text{ kcal}/(\text{Kg } ^\circ\text{K})$, e una kcal corrisponde a 4.18 kJ . La quantità di calore da trasferire all'acqua è $\Delta Q = mc_s \Delta T$, in cui m è la massa d'acqua e ΔT la differenza tra la temperatura ambiente e la temperatura di ebollizione. Il tempo necessario, considerando trascurabili le

perdite di calore con l'ambiente, e' dunque $t = \Delta Q/P$, indicando con P la potenza del bollitore. Immaginando che la temperatura ambiente sia di 25°C , e fissando $m = 1\text{Kg}$, abbiamo, $t = 130.6$ sec; per una tazza, $t \approx 43$ sec, in sostanziale accordo con l'affermazione fatta nel sito Internet.

Raggiunta l'ebollizione, per vaporizzare tutto il contenuto del bollitore dobbiamo fornire al sistema una ulteriore energia termica, pari a $\Delta Q_e = m \lambda_e$, indicando con λ_e il calore latente di evaporazione. Analogamente al caso precedente, $t_e = m \lambda_e/P$; utilizzando il valore di λ_e fornito nel testo, otteniamo $t_e = 946$ sec, pari a poco più di un quarto d'ora.

Se il coperchio del bollitore è a tenuta, man mano che viene trasferita energia termica al sistema, parte del liquido si trasforma in vapore e la temperatura aumenta. Fino a che una frazione finita dell'acqua è in fase fluida, supponendo che tutto il sistema sia approssimativamente all'equilibrio termodinamico, la relazione tra temperatura e pressione è quella graficata nella figura. Nel momento in cui tutto il liquido si è trasformato in vapore e nell' ipotesi, suggerita nel testo dell'esercizio, che il vapore segua l'equazione di stato dei gas perfetti, la temperatura e la pressione del vapore saranno tali da soddisfare contemporaneamente la curva di pressione di saturazione e l'equazione di stato; il sistema si troverà quindi nel punto di intersezione tra le due curve.

Dobbiamo quindi sovrapporre alla curva presentata nel testo l' equazione di stato di un gas perfetto per la situazione considerata. L'equazione di stato di un gas perfetto è:

$$pV = nRT \quad , \quad (38)$$

con p la pressione del gas, V il suo volume, n il numero di moli di gas presente, $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ la costante dei gas e T la temperatura. Riscriviamo la Eq. 38 come:

$$p = \frac{n}{V} RT \quad . \quad (39)$$

La massa molare dell'acqua è $\approx 18 \text{ g/mol}$, per cui, nel nostro caso, considerando un volume di 1 litro, otteniamo che $p(kP) = 1.61 \text{ T}(^\circ\text{K})$.

Le due curve sono graficate nella figura seguente; si ottiene immediatamente che, nel momento in cui tutto il liquido si è trasformato in vapore, la temperatura è leggermente inferiore ai 440°K e la pressione è $\approx 700 \text{ kP}$, corrispondente a circa 7 volte la pressione atmosferica. Si sconsiglia quindi vivamente di mettere in pratica in ambiente domestico quanto suggerito dall' esercizio. Si noti inoltre che, per semplicità, abbiamo trascurato il fatto che all'inizio dell' operazione una quantità non trascurabile di aria atmosferica è presente nel bollitore.

