

**Scuola Superiore di Catania**  
**Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari**  
**A.A. 2021–2022**

**Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica**  
(Corsi di Laurea *in* Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

14 Settembre 2021

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.**

**Esercizio 1.** Gli spigoli di un cubo sono numerati da 1 a 12. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

**Esercizio 2.** (a) 9 sedie sono poste, equidistanziate, intorno a un tavolo circolare. Sul tavolo sono posizionati 9 segnaposto con i nomi (tutti diversi tra loro) degli ospiti. Tutti i 9 ospiti vanno a sedersi a tavola, ma vedono i segnaposto solo dopo essersi seduti e si accorgono che nessuno è seduto al posto assegnato. Si dimostri che è possibile ruotare il tavolo (senza far alzare gli ospiti) in modo tale che almeno due degli ospiti siano seduti contemporaneamente al posto assegnato.

(b) Si dia un esempio di una sistemazione dei 9 ospiti tale che uno e uno solo di essi sia seduto al posto assegnato e tale che nessuna rotazione del tavolo sistemi al posto assegnato più di una persona.

**Esercizio 3.** Sui lati  $AB$  e  $BC$  del quadrilatero convesso  $ABCD$  si trovano rispettivamente i punti  $M$  e  $N$ , con la proprietà che ciascuno dei due segmenti  $AN$  e  $CM$  divide il quadrilatero  $ABCD$  in due parti di area uguale. Si dimostri che il segmento  $MN$  incontra la diagonale  $BD$  nel punto medio di  $BD$ .

**Esercizio 4.** Dimostrare che nessun numero della forma  $a^3 - 2a + 1$ , dove  $a \geq 2$  è un numero intero, è un quadrato perfetto.

**Esercizio 5.** Siano  $a, b, c$  tre numeri reali positivi. Si dimostri che

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c} \geq (abc)^{a+b+c}.$$

**Esercizio 6.** Si determinino tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$