

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari
A.A. 2018–2019

Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
(Corsi di Laurea *in* Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

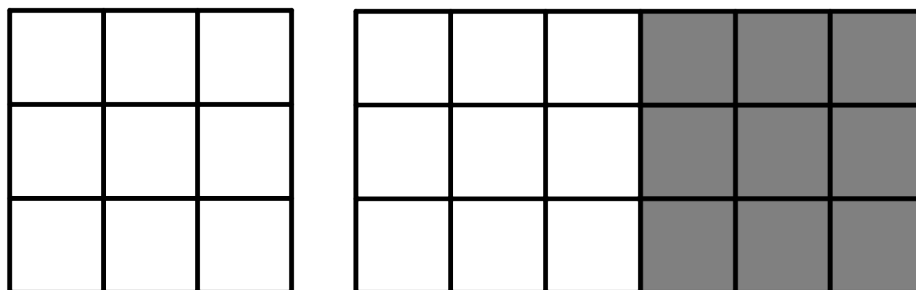
Soluzioni degli Esercizi

Esercizio 1. Una scacchiera $n \times m$ le cui caselle sono colorate in bianco e nero ha la seguente proprietà: per ogni casella della scacchiera, il numero di caselle dello stesso colore nella riga e nella colonna che la contengono sono uguali. Si trovino tutti i possibili valori di n e m .

Soluzione. Senza perdita di generalità, poniamo $n \leq m$ (in caso contrario è sufficiente ruotare la scacchiera di 90°), inoltre con una scacchiera $n \times m$ intenderemo una scacchiera avente n righe e m colonne.

Si vede ovviamente che una qualunque scacchiera quadrata monocolore (per esempio con tutte le caselle bianche) soddisfa le ipotesi, dunque, tutte le coppie (n, m) con $n = m$ sono possibili.

Se $m = 2n$ si consideri una scacchiera composta da due sottoscacchiere $n \times n$, aventi una tutte le caselle colorate di nero, l'altra tutte le caselle colorate di bianco. Chiaramente anche tale scacchiera soddisfa le ipotesi, dunque, tutte le coppie (n, m) con $m = 2n$ sono possibili.



Esempi di scacchiere per $n = m = 3$ e $n = 3, m = 6$.

Se si avesse una scacchiera $n \times m$, come nelle ipotesi, con $m > 2n$, presa una qualunque riga essa avrà b caselle nere e w caselle bianche e necessariamente almeno uno di questi due numeri b, w sarà maggiore o uguale a $m/2$, supponiamo sia $b \geq m/2$. Ma allora la colonna contenente una casella bianca di tale riga avrà anch'essa almeno $b \geq m/2$ caselle bianche, quindi $n \geq b \geq m/2$. Da ciò segue che $2n \geq m$ che è una contraddizione.

Resta dunque infine da stabilire se sia possibile che esista una scacchiera $n \times m$, come nelle ipotesi, con $n < m < 2n$.

Per una tale scacchiera, se indichiamo le sue righe con R_i , per $i \in \{1, \dots, n\}$, si indichi con b_i il numero di caselle nere presenti in R_i e con w_i il numero di caselle bianche presenti in R_i . Dopodiché si consideri $k = \max(b_1, \dots, b_n, w_1, \dots, w_n)$, notando che deve essere $2k \geq m$. Dato che invertendo i colori della scacchiera, la proprietà delle ipotesi continua a valere, possiamo supporre che esista $r \in \{1, \dots, n\}$ tale che $k = w_r$. Si noti che deve essere $k \leq n$,

in quanto una colonna che contiene una casella bianca di R_r deve essere alta almeno k per contenere k caselle bianche almeno.

Poiché se si scambiano due righe o due colonne la proprietà delle ipotesi rimane valida, possiamo assumere che $r = 1$ (cioè l'ultima riga della scacchiera contiene k caselle bianche) e che le caselle bianche stiano nelle prime k posizioni di R_1 .

Supponiamo per assurdo che $k = n$, in tal caso si avrebbe che le prime k colonne hanno solo caselle bianche. Di conseguenza, tutte le colonne a partire dalla $k + 1$ -esima avrebbero tutte solo caselle nere. Da ciò si deduce che ogni riga per poter soddisfare la proprietà dovrebbe avere k caselle bianche e k caselle nere, per cui $m = 2k = 2n$, il che è in contraddizione con l'assunzione iniziale $n < m < 2n$.

Essendo allora $k < n$, deve esistere almeno una casella nera nella prima colonna. Scelta una qualunque di queste caselle nere, sia S la riga a cui appartiene tale casella.

Si osserva che nelle prime k posizioni della riga S è presente almeno una casella bianca, in quanto se così non fosse, si avrebbero k caselle nere consecutive (di più non è possibile), ma allora una colonna che contiene una di esse ha k caselle bianche e k caselle nere, da cui $n = 2k$. Essendo $2k \geq m$, si avrebbe $n = 2k \geq m$, in contraddizione con $n < m < 2n$. Si consideri quindi una di queste caselle bianche: essa sta nella stessa colonna di una delle caselle bianche di R_1 (chiaramente non nella prima colonna), per cui tale colonna avrà k caselle bianche e di conseguenza la riga S ha k caselle bianche e $m - k$ caselle nere. Ma la prima casella della riga S appartiene alla prima colonna che ha $n - k$ caselle nere. Allora deve essere $n - k = m - k$, da cui $n = m$, che è in contraddizione di nuovo con l'assunzione iniziale $n < m < 2n$.

Abbiamo quindi che per ogni coppia n, m tale che $n < m < 2n$ non esiste alcuna colorazione della scacchiera per cui vale la proprietà delle ipotesi.

Concludiamo dunque, dopo tutta questa discussione, che le uniche coppie (n, m) possibili sono date da (n, n) , $(n, 2n)$ e $(2n, n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Siano x_1, x_2, x_3 tre numeri reali positivi e y_1, y_2, y_3 una loro permutazione. Si provi la disuguaglianza

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq x_1 + x_2 + x_3.$$

Soluzione. Appliciamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, o di prodotto scalare in \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

ai vettori

$$\vec{a} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}, \frac{x_3}{\sqrt{y_3}} \right) \quad \text{e} \quad \vec{b} = (\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_3}).$$

Segue dunque

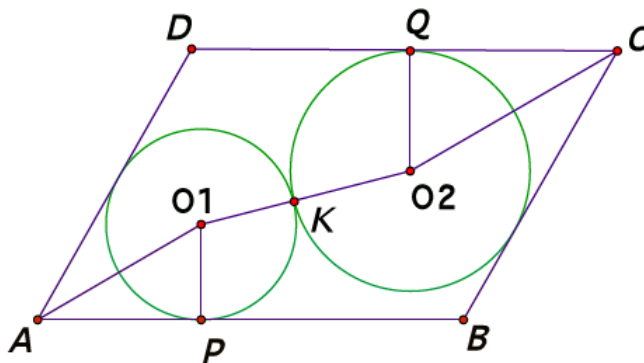
$$x_1 + x_2 + x_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3}} \sqrt{y_1 + y_2 + y_3} = \sqrt{\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3}} \sqrt{x_1 + x_2 + x_3}.$$

in quanto i numeri y_1, y_2, y_3 sono una permutazione di x_1, x_2, x_3 .

Dividendo allora entrambi i membri di questa disuguaglianza per $\sqrt{x_1 + x_2 + x_3}$ e elevandoli poi al quadrato si ottiene la tesi.

Esercizio 3. Sia $ABCD$ un parallelogramma che contiene due circonferenze \mathcal{C}_1 di centro O_1 , \mathcal{C}_2 di centro O_2 , tangenti esternamente fra loro nel punto K e tali che \mathcal{C}_1 è tangente ai lati AB e AD , mentre \mathcal{C}_2 è tangente ai lati CB e CD . Si dimostri che il punto K appartiene alla diagonale AC .

Soluzione. Facendo riferimento alla figura



e sfruttando la tangenza fra lati e circonferenze, il segmento AO_1 sta sulla bisettrice dell'angolo \widehat{DAB} e CO_2 sulla bisettrice dell'angolo \widehat{DCB} . Il punto K è allineato con O_1 ed O_2 , in quanto la tangente comune alle due circonferenze in K è perpendicolare ai raggi. Le rette contenenti AO_1 ed CO_2 sono parallele, essendo gli angoli $\widehat{O_1AB}$ e $\widehat{O_2CD}$ uguali (la metà di due angoli opposti del parallelogramma) e i lati AB e CD paralleli. Quindi anche gli angoli $\widehat{AO_1O_2}$ e $\widehat{CO_2O_1}$ (sono alterni interni) sono uguali. I triangoli $AP O_1$ ed $CQ O_2$ sono simili (in quanto aventi tutti gli angoli uguali), quindi

$$\frac{AO_1}{O_1K} = \frac{AO_1}{O_1P} = \frac{CO_2}{O_2Q} = \frac{CO_2}{O_2K}$$

da cui segue che anche i triangoli AO_1K e CO_2K sono simili. Quindi l'angolo $\widehat{O_1AK}$ è uguale all'angolo $\widehat{O_2CK}$ e sottraendoli rispettivamente agli angoli $\widehat{O_1AB}$ e $\widehat{O_2CD}$, possiamo concludere che gli angoli \widehat{KAB} e \widehat{KCD} sono uguali. Segue che i punti A, K, C sono allineati, il che è la tesi.

Esercizio 4. Un professore entra a lezione e scrive un polinomio a coefficienti interi $p(x)$ sulla lavagna, poi dice: "Oggi è il compleanno di mio figlio, compie a anni. Se mettete a nel polinomio ottenete ancora a , mentre se ci mettete 0 trovate un numero primo maggiore di a ." Quanti anni compie il figlio del professore?

Soluzione. Sia r il numero primo tale che $p(0) = r$ e $r > a$. Definiamo $\tilde{p}(x) = p(x) - x$. Per ipotesi $p(a) = a$ pertanto a è radice di $\tilde{p}(x)$. Per il teorema di Ruffini, si ha che $\tilde{p}(x) = q(x)(x - a)$ per un polinomio $q(x)$ a coefficienti interi, dunque $p(x) = q(x)(x - a) + x$. Per ipotesi, sappiamo che $p(0) = q(0)(-a) = r$, di conseguenza a divide r . Poiché r è un numero primo e $r > a$, l'unica possibilità è allora che $a = 1$, quindi il figlio del professore compie 1 anno.

Esercizio 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$xf(y) - yf(x) = f(y/x),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.

Soluzione. Ponendo $y = 0$, abbiamo $xf(0) = f(0)$ per ogni $x \neq 0$, quindi deve essere $f(0) = 0$.

Ponendo $y = x \neq 0$ si ha

$$0 = xf(x) - xf(x) = f(x/x) = f(1),$$

cioè $f(1) = 0$.

Ponendo $y = 1$ otteniamo

$$-f(x) = xf(1) - f(x) = f(1/x)$$

per ogni $x \neq 0$.

Se $x = 1/a$ e $y = 1/b$, si ha allora

$$-\frac{f(b)}{a} + \frac{f(a)}{b} = \frac{f(1/b)}{a} - \frac{f(1/a)}{b} = xf(y) - yf(x) = f(y/x) = f(a/b)$$

per ogni due numeri reali $a, b \neq 0$.

Se $x = b$ e $y = a$, si ha

$$bf(a) - af(b) = f(a/b)$$

per ogni due numeri reali $a, b \neq 0$.

Quindi, per ogni due numeri reali $a, b \neq 0$, concludiamo

$$bf(a) - af(b) = -\frac{f(b)}{a} + \frac{f(a)}{b}$$

e raccogliendo,

$$f(b)\left(a - \frac{1}{a}\right) = f(a)\left(b - \frac{1}{b}\right).$$

Segue allora che la quantità

$$\frac{f(x)}{x - 1/x}$$

è uguale ad una costante reale C , per ogni $x \neq 0$, cioè

$$f(x) = C\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Poiché per ogni costante reale C , le funzioni definite da

$$f(x) = C\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

per ogni $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ soddisfano le ipotesi, queste sono tutte e sole le funzioni cercate.

Esercizio 6. Si provi che se $n, m \in \mathbb{N}$ il numero

$$3^n + 3^m + 1$$

non è mai un quadrato perfetto.

Soluzione. Se un numero intero $n \in \mathbb{N}$ è pari, si ha $n = 2k$, per un qualche $k \in \mathbb{N}$, e

$$3^n = 3^{2k} = 9^k = (8+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 8^i$$

che dunque dà resto 1 una volta diviso per 8. Se invece n è dispari, si ha $n = 2k+1$ e

$$3^n = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k = 3 \cdot (8+1)^k = 3 \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 8^i$$

dà resto 3 una volta diviso per 8.

Di conseguenza, il resto della divisione per 8 di ogni numero della forma

$$3^n + 3^m + 1$$

può essere solo dato dalle combinazioni $1+1+1=3$, $1+3+1=5$ e $3+3+1=7$, cioè i possibili resti sono 3, 5, 7.

I possibili resti della divisione di un quadrato perfetto q^2 per 8, dove $q = 8r + s$ con $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$, quindi $q^2 = 64r^2 + 16rs + s^2$, sono dati dai resti della divisione per 8 dei quadrati dei numeri da 0 a 7. Questi resti sono allora (per calcolo diretto)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}$$

e non coincidendo mai con i numeri 3, 5, 7 di cui sopra, concludiamo che

$$3^n + 3^m + 1$$

non può mai essere un quadrato perfetto q^2 .