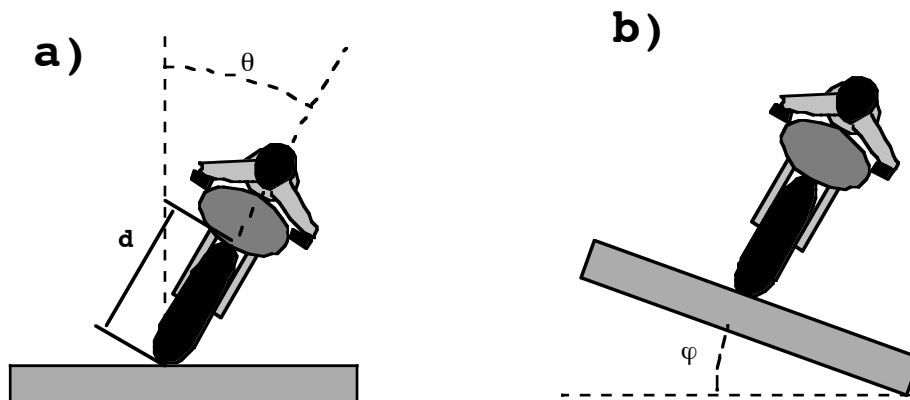


SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO DEI CORSI ORDINARI
A.A. 2018-2019
CLASSE DELLE SCIENZE SPERIMENTALI
PROVA DI FISICA

Problema n.1



Un motociclista deve percorrere una curva alla velocità di 150 km/h. Sapendo che la massa complessiva del motociclista e della moto è $M = 150$ kg e che il centro di massa dell'insieme moto+motociclista percorre una traiettoria circolare di raggio $R = 200$ m, determinare, nel caso **a)**, nel quale la pista è orizzontale,

- 1- Il minimo coefficiente d'attrito fra pneumatici ed asfalto

$$\mu_s(a) = \dots\dots\dots$$

Sapendo poi che il centro di massa è ad una distanza $d = 0.7$ m dal punto di appoggio della ruota, determinare

- 2- l' inclinazione dalla verticale che deve mantenere il motociclista lungo la curva

$$\theta = \dots\dots\dots$$

- 3- Nel caso **b)**, nel quale la pista è inclinata di un angolo $\varphi = 20^\circ$ dall'orizzontale, determinare il minimo coefficiente di attrito per poter percorrere la curva, sempre alla velocità $v = 150$ km/h

$$\mu_s(b) = \dots\dots\dots$$

Soluzione

Domanda 1

Per percorrere un tratto di traiettoria circolare di raggio il sistema moto+motociclista deve essere soggetto ad una forza centripeta $F_c = M \frac{v^2}{R}$ (orizzontale). Le forze che agiscono sul sistema sono la

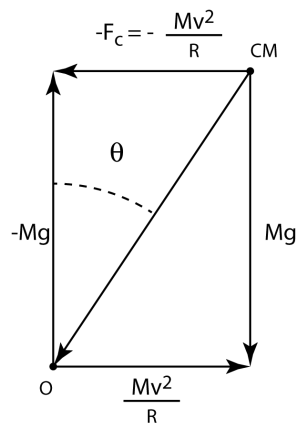
forza peso (verticale) e la forza di attrito (orizzontale). La forza di attrito è, in questo caso, quindi l'unica che può fornire la forza centripeta necessaria a percorrere la traiettoria circolare. Si tratta di una forza di attrito statico che si esercita sul punto di contatto tra gli pneumatici e l'asfalto, infatti si suppone che gli pneumatici non stiano scivolando sul terreno e quindi il punto di contatto deve essere, istantaneamente fermo rispetto al suolo. La forza d'attrito statico può assumere, per definizione di coefficiente di attrito statico, un valore massimo dato dalla $F_{att,s} \leq \mu_s N = \mu_s Mg$, quindi

$$\frac{Mv^2}{R} \leq Mg\mu_s \Rightarrow \mu_s \geq \frac{v^2}{gR} = 0.88$$

Domanda 2

Nel sistema di riferimento che ruota con il motociclista (cioè il sistema di riferimento che ha origine nel centro della curva e i cui assi ruotano con la stessa velocità angolare con cui viene percorsa la curva) il motociclista è fermo. Si trova quindi in uno stato di equilibrio. Questo sistema di riferimento non è però inerziale. In esso si manifesta una forza apparente "centrifuga" che è uguale ed opposta alla forza centripeta che caratterizza il moto nel sistema di riferimento fisso. In questo nuovo sistema di riferimento le forze che agiscono sul motociclista sono: la forza peso Mg , applicata al centro di massa, la reazione normale del suolo (che equilibra la forza peso), applicata al punto di contatto con il suolo, la forza "centrifuga", anch'essa applicata al centro di massa e la forza d'attrito applicata al punto di contatto con il suolo.

Per garantire che il sistema sia in equilibrio deve essere nulla la risultante delle forze e la somma dei momenti calcolata rispetto al punto di contatto. L'annullamento della risultante delle forze è garantita dalle condizioni della domanda precedente. L'annullamento del momento totale rispetto al punto di contatto richiede che la risultante della forza centrifuga e della forza peso "punti" verso il punto di contatto O



cioè che sia

$$\tan \theta = \frac{Mv^2/R}{Mg} = \frac{v^2}{Rg} = 0.88 \Rightarrow \theta = 41.5^\circ$$

Domanda 3

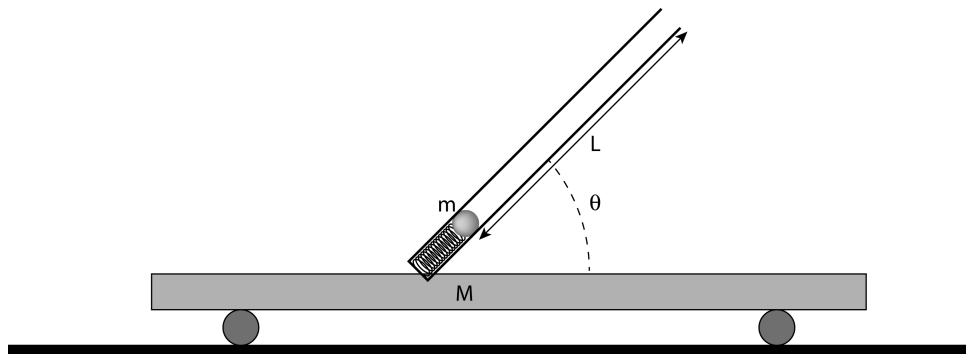
La componente verticale della risultante delle forze deve equilibrare la forza peso, mentre la somma delle componenti orizzontali deve fornire la forza centripeta necessaria a percorrere la traiettoria circolare:

$$\begin{cases} F_{1_{att}} \cos \varphi + N \sin \varphi = \frac{M v^2}{R} \\ -F_{1_{att}} \sin \varphi + N \cos \varphi = M g \end{cases} \quad \begin{cases} N = M g \cos \varphi + \frac{M v^2 \sin \varphi}{R} = 1828 \text{ N} \\ F_{1_{att}} = \frac{M \cos \varphi (v^2 - R g \tan \varphi)}{R} = 720.2 \text{ N} \end{cases}$$

$$F_{1_{att}} = N \mu_1 \quad \mu_1 = \frac{F_{1_{att}}}{N} = 0.39$$

Problema n.2

Un carrello di massa $M = 5 \text{ kg}$ può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Sul carrello è fissato un "cannone a molla" all'interno del quale si trova una molla di costante elastica $k = 200 \text{ N/m}$ che spinge un proiettile di massa $m = 200 \text{ g}$. Il cannone è costruito in modo che la molla sia a riposo quando il proiettile si trova all'estremità di uscita della canna e che, quando la molla è completamente carica, sia compressa di una lunghezza $L = 1 \text{ m}$. La canna del cannone forma un angolo $\theta = 45^\circ$ col piano del carrello.



Determinare:

1. L'accelerazione del carrello all'istante iniziale del moto

$$A = \dots\dots\dots \text{m s}^{-2}$$

2. L'angolo che la velocità del proiettile, misurata rispetto al suolo, forma con l'orizzontale all'istante di uscita dalla canna del cannone

$$\theta_{\text{out}} = \dots\dots\dots$$

Soluzione

Domanda 1

La risultante delle forze applicate al carrello è la componente orizzontale della forza elastica che nell'istante iniziale vale $F_{el} = -k L \cos \theta$

$$-k L \cos \theta = M A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{k L \cos \theta}{M} = -28.3 \text{ m s}^{-2}$$

Domanda 2

L'angolo θ è quello che forma, rispetto all'orizzontale, la velocità del proiettile misurata nel sistema di riferimento del carrello. Se chiamiamo V la velocità del carrello, v_x e v_y le componenti della velocità del proiettile nel sistema di riferimento inerziale e v'_x e v'_y le componenti della velocità del proiettile nel sistema di riferimento solidale al carrello, avremo

$$\tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - V}$$

Nel processo si conservano l'energia e la componente orizzontale della quantità di moto nel sistema di riferimento inerziale. Il sistema da risolvere allora è

$$\begin{cases} \frac{1}{2} k L^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + m g L \sin \theta \\ M V + m v_x = 0 \\ \tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - V} \end{cases}$$

$$v_y = \tan \theta \left(1 + \frac{m}{M} \right) v_x; \quad V = -\frac{m}{M} v_x$$

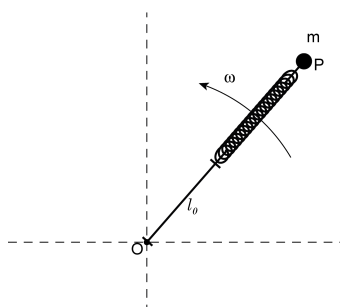
$$k L^2 - 2 m g L \sin \theta = \left[m \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(1 + \tan^2 \theta \left(1 + \frac{m}{M} \right) \right) \right] v_x^2 \quad \Rightarrow v_x = \pm \sqrt{\frac{k L^2 - 2 m g L \sin \theta}{m \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(1 + \tan^2 \theta \left(1 + \frac{m}{M} \right) \right)}} = \pm 21.6 \text{ m s}^{-1}$$

Se si sceglie la soluzione positiva, che è quella che implica il moto verso l'alto del proiettile, si ha quindi

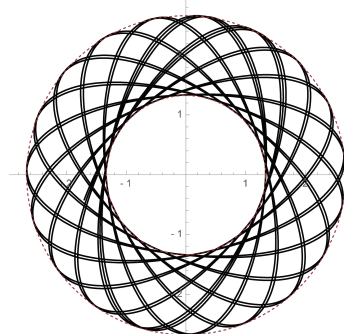
$$v_y = 22.42 \text{ m s}^{-1}; \quad \tan \theta_{out} = \frac{v_y}{v_x} = 1.04 \quad \Rightarrow \theta_{out} = 46.1^\circ$$

Problema n.3

Il sistema mostrato in figura a) è costituito da un filo inestensibile e di massa trascurabile lungo $l_0 = 0.66 \text{ m}$ con una estremità fissa in O e l'altra collegata ad una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k = 150 \text{ N/m}$. All'altro estremo P della molla è attaccata una massa $m = 25 \text{ kg}$ che è libera di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale.



a)



b)

La massa viene messa in moto ad una distanza da O $r_0 = 1.33 \text{ m}$ e direzione di moto ortogonale al vettore OP.

1. Determinare la velocità angolare che deve avere inizialmente la massa m per ottenere che la sua traiettoria sia circolare stabile $\omega_0 = \dots\dots\dots$

Supponiamo ora che il moto inizi come nel caso precedente ad una distanza $r_0 = 1.33 \text{ m}$ da O e con velocità angolare $\omega' = 4 \text{ rad/s}$ e sempre con una componente radiale della velocità nulla. Le traiettorie percorse da m saranno del tipo di quelle mostrate in figura b).

2. Determinare il modulo della velocità di m quando la sua distanza da O è $r_1 = 2$ m

$v_1 = \dots\dots\dots$

3. Sempre nello stesso istante calcolare la velocità angolare di m

$\omega_1 = \dots\dots\dots$

Soluzione

Domanda 1

In una traiettoria circolare la forza agente ha la sola componente radiale fornita, in questo caso, dalla molla

$$-m\omega_0^2 r_0 = -k(r_0 - l_0)$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(r_0 - l_0)}{mr_0}} = \sqrt{3} = 1.73 \text{ s}^{-1}$$

Domanda 2

La forza è conservativa, quindi l'energia totale si conserva

$$E_{M,0} = \frac{1}{2}m(\omega_0 r_0)^2 + \frac{1}{2}k(r_0 - l_0)^2 = 389 \text{ J}$$

$$E_{M,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(r_1 - l_0)^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{M,0} - k(r_1 - l_0)^2}{m}} = 4.52 \text{ m s}^{-1}$$

Domanda 3

La forza è centrale, quindi il momento angolare si conserva

$$L_0 = mr_0^2 \omega_0' = 178 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \quad L_0 = mr_1^2 \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{mr_0^2 \omega_0'}{mr_1^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \omega_0' = 1.78 \text{ s}^{-1}$$

Problema n.4

Un satellite geostazionario di massa $M_s = 10$ tonnellate percorre un'orbita posta sul piano dell'equatore rimanendo costantemente sulla verticale di un definito punto della superficie terrestre.

Sapendo che la costante di gravitazione universale è $G = 6.674 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, che la massa della terra è $M_T = 5.973 \times 10^{24} \text{ kg}$ e che il raggio della terra è $R_T = 6371 \text{ km}$, calcolare, trascurando gli effetti del moto della terra all'istante del lancio:

1. Il raggio dell'orbita del satellite

$r = \dots\dots\dots$

2. L'energia che si è dovuta fornire al satellite

$W = \dots\dots\dots$

Soluzione

Domanda 1

Anche in questo caso la forza di attrazione gravitazionale deve fornire la forza centripeta

$$G \frac{M_T M_S}{r^2} = M_S \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{G M_T}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad r = 4.22 \times 10^7 \text{ m} = 42200 \text{ km}$$

Domanda 2

Il lavoro necessario per portare il satellite in orbita è pari alla variazione della sua energia totale

$$E_{k,1} + E_{p,1} = E_{k,0} + E_{p,0} + W$$

La velocità del satellite è $v = \omega r$, quindi la sua energia cinetica in orbita è

$$E_{k,1} = \frac{1}{2} M_S v^2 = \frac{1}{2} M_S r^2 \omega^2 = 4.72 \times 10^{10} \text{ J}$$

L'energia potenziale gravitazionale è, nello stato iniziale (sulla superficie della terra) e in quello finale (in orbita)

$$E_{p,0} = -G \frac{M_T M_S}{R} = -6.26 \times 10^{11} \text{ J}; \quad E_{p,1} = -G \frac{M_T M_S}{r} = -9.43 \times 10^{10} \text{ J}$$

quindi, considerando trascurabile l'energia cinetica iniziale ($E_{k,0} \approx 0$), cioè trascurando la rotazione della terra

$$W = (E_{p,1} + E_{k,1}) - (E_{p,0} + 0) = 5.78 \times 10^{11} \text{ J}$$

Problema n.5

Il livello di un liquido criogenico viene comunemente misurato tramite tecniche capacitive. Si consideri pertanto un condensatore ad armature piane e parallele, aventi sezione quadrata di lato $l = 10 \text{ cm}$. Le armature sono separate da una distanza $d = 1 \text{ mm}$, con due lati orientati parallelamente alla superficie del liquido e gli altri due perpendicolarmente alla superficie. Il condensatore è riempito con azoto liquido (costante dielettrica relativa $K_{N_2} = 23$) ad altezze H diverse. Si calcoli la capacità totale del sistema per

1. $H = 5 \text{ cm}$

$C_{1,\text{tot}} = \dots\dots\dots$

2. $H = 10 \text{ cm}$.

$C_{2,\text{tot}} = \dots\dots\dots$

Costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.

Soluzione

Domanda 1

Il condensatore può essere pensato come il parallelo tra due condensatori ad armature piane e

parallele, aventi sezioni rettangolari di area $\ell \times \ell/2$ e separazione d , uno immerso nell'azoto liquido, l'altro in aria. Le rispettive capacità sono

$$C_{N_2} = \epsilon_0 K_{N_2} \frac{\ell^2}{2d} = 1.02 \text{ nF}$$

$$C_{aria} = \epsilon_0 K_{aria} \frac{\ell^2}{2d} = 44 \text{ pF}$$

con $K_{aria} = 1$. Quindi

$$C_{1,tot} = C_{N_2} + C_{aria} = 1.064 \text{ nF}$$

Domanda 2

Se il condensatore è completamente riempito di azoto liquido, si può pensare come il parallelo di due condensatori aventi ciascuno capacità C_{N_2} . Quindi

$$C_{2,tot} = C_{N_2} + C_{N_2} = 2.04 \text{ nF}$$

Problema n.6

Una sorgente puntiforme emette radiazione elettromagnetica di frequenza $\nu = 1.2 \text{ GHz}$ che si propaga sotto forma di onde sferiche in un liquido con indice di rifrazione $n = 1.33$.

L'intensità misurata ad una distanza $d_0 = 20 \text{ m}$ dalla sorgente è $I_0 = 0.05 \text{ W/m}^2$.

Determinare:

1. la potenza della sorgente P

$P = \dots\dots\dots$

2. la lunghezza d'onda λ dell'onda nel mezzo

$\lambda = \dots\dots\dots$

3. l'energia raccolta W in un minuto da un rivelatore di sezione $\Sigma = 0.25 \text{ m}^2$ posto alla distanza $2 d_0$ dalla sorgente

$W = \dots\dots\dots$

Soluzione

Domanda 1

La potenza è l'energia emessa per unità di tempo sull'intero angolo solido. L'intensità è l'energia che attraversa una superficie unitaria nel tempo unitario.

$$P_0 = 4\pi d_0^2 I_0 = 251 \text{ watt}$$

Domanda 2

La lunghezza d'onda di un'onda elettromagnetica in un mezzo con indice di rifrazione n è data dalla

$$\lambda = \frac{v}{\nu}; \quad \nu = \frac{c}{n}; \quad \lambda = \frac{c}{n\nu} = 0.19 \text{ m}$$

Domanda 3

L'energia raccolta in un intervallo di tempo Δt su di un'area Σ se l'intensità è I_1 è

$$W = I_1 \Sigma \Delta t$$

D'altra parte l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente

$$I_1 = I_0 \left(\frac{d_0}{d_1} \right)^2 = \frac{I_0}{4} \quad \text{quindi} \quad W = \frac{I_0}{4} \Sigma \Delta t = 0.185 \text{ J}$$