

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione al I Anno dei Corsi Ordinari
A.A. 2018–2019

Classe delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
(Corsi di Laurea *in* Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

18 Settembre 2018

Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.

Esercizio 1. Una scacchiera $n \times m$ le cui caselle sono colorate in bianco e nero ha la seguente proprietà: per ogni casella della scacchiera, il numero di caselle dello stesso colore nella riga e nella colonna che la contengono sono uguali. Si trovino tutti i possibili valori di n e m .

Esercizio 2. Siano x_1, x_2, x_3 tre numeri reali positivi e y_1, y_2, y_3 una loro permutazione. Si provi la disuguaglianza

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq x_1 + x_2 + x_3.$$

Esercizio 3. Sia $ABCD$ un parallelogramma che contiene due circonferenze \mathcal{C}_1 di centro O_1 , \mathcal{C}_2 di centro O_2 , tangenti esternamente fra loro nel punto P e tali che \mathcal{C}_1 è tangente ai lati AB AD , mentre \mathcal{C}_2 è tangente ai lati CB CD . Si dimostri che il punto P appartiene alla diagonale AC .

Esercizio 4. Un professore entra a lezione e scrive un polinomio a coefficienti interi $p(x)$ sulla lavagna, poi dice: "Oggi è il compleanno di mio figlio, compie a anni. Se mettete a nel polinomio ottenete ancora a , mentre se ci mettete 0 trovate un numero primo maggiore di a ." Quanti anni compie il figlio del professore?

Esercizio 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$xf(y) - yf(x) = f(y/x),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.

Esercizio 6. Si provi che se $n, m \in \mathbb{N}$ il numero

$$3^n + 3^m + 1$$

non è mai un quadrato perfetto.