

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica  
A.A. 2009–2010  
(corsi di laurea di Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Soluzioni degli Esercizi

**Esercizio 1.** Su un foglio a quadretti è disegnata la pianta quadrata di una casa di lato 10, con i bordi e i muri interni che stanno solo sui lati dei quadretti.

Si provi che se la lunghezza totale dei muri interni è maggiore di 81 allora la casa ha due “ambienti” non comunicanti tra loro.

**Soluzione.** Supponiamo per assurdo che la lunghezza totale sia maggiore di 81 e che non ci siano due ambienti non comunicanti tra loro.

Consideriamo l'insieme complessivo dei muri interni e dividiamolo in pezzi connessi che non si toccano fra loro. Ognuno di questi pezzi è un *albero* (nel senso dei grafi, non ha cioè circuiti chiusi) altrimenti ci sarebbero due ambienti separati.

Consideriamo due tipi di pezzi connessi: quelli che toccano i bordi del quadrato e quelli che non li toccano.

Se uno di questi pezzi tocca il bordo del quadrato, si vede facilmente che non lo può toccare una seconda volta altrimenti abbiamo due ambienti separati, inoltre, con un facile ragionamento induttivo, si vede che seguendo lo sviluppo del muro, si coprono tanti punti del reticolo interni al quadrato quanti la lunghezza complessiva del pezzo di muro.

Se invece un pezzo di muro è tutto interno, cioè non tocca mai il bordo del quadrato, partendo da un suo punto “terminale” (che ci deve essere essendo un albero e quindi non possedendo circuiti chiusi) e ragionando come prima si vede che in questo caso si coprono tanti punti del reticolo interno quanti la lunghezza complessiva del pezzo di muro più uno.

Essendo tutti questi pezzi di muro disgiunti tra loro, si conclude che il numero totale di punti interni coperti deve essere maggiore od uguale alla lunghezza totale dei muri interni. Visto che i punti interni sono solo 81, abbiamo una contraddizione.

**Esercizio 2.** Ogni punto del piano è colorato di bianco o di nero.

- Si dimostri che esiste sempre un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.
- Si dimostri che si possono sempre trovare 4 punti dello stesso colore tali che uno di questi punti sia il baricentro del triangolo formato dagli altri 3.

**Soluzione.** 1) Supponiamo per assurdo che tale triangolo “monocolore” non esista.

Siano  $A$  e  $B$  due punti dello stesso colore, diciamo bianco. Considerando i due punti  $C$  e  $C'$ , simmetrici rispetto al segmento  $AB$ , tali che i triangoli  $ABC$  e  $ABC'$  siano equilateri, abbiamo che sia  $C$  che  $C'$  devono essere dunque neri. Questo implica che il punto  $D$ , che sta sulla retta per  $AB$  e tale che  $DA = 2DB$  ( $B$  sta tra  $A$  e  $D$ ), deve essere bianco altrimenti il triangolo  $CC'D$ , che è equilatero, sarebbe “monocolore”.

Ripetendo allora il ragionamento precedente, il punto  $E$  che sta dalla stessa parte di  $C$  rispetto alla retta per  $AB$  e tale che il triangolo  $DBE$  sia equilatero deve anch'esso essere nero.

Considerando ora il punto  $F$  intersezione della retta per  $A$  e  $C$  e della retta per  $D$  e  $E$ , vediamo che entrambi i triangoli  $ADF$  e  $CEF$  sono equilateri ma il primo ha i vertici della base  $A$  e  $D$  bianchi, il secondo ha i vertici della base  $C$  ed  $E$  entrambi neri, questo porta chiaramente ad una contraddizione non potendo quindi essere  $F$  né bianco, né nero.

2) Siano  $ABC$  tre punti distinti dello stesso colore, diciamo bianco. Il baricentro  $O$  del triangolo  $ABC$  deve essere nero, altrimenti la tesi segue. Consideriamo il punto  $C'$  che sta sulla retta  $OC$  e tale che  $CC' = 3OC$  ( $C$  sta tra  $O$  e  $C'$ ). Per la proprietà del baricentro che divide ogni mediana in due parti in rapporto  $2 : 1$  si vede che il punto  $C$  è il baricentro del triangolo  $ABC'$ , quindi il punto  $C'$  deve essere di colore nero, altrimenti abbiamo finito. Lo stesso ragionamento si ripete per gli altri vertici concludendo che i punti analoghi  $A'$  e  $B'$  sono anch'essi neri.

Ora si conclude notando che il punto  $O$ , di colore bianco è il baricentro anche del triangolo  $A'B'C'$ , di vertici tutti bianchi.

**Esercizio 3.** Sia  $ABCD$  un quadrilatero con i vertici su di una circonferenza in cui si possa inscrivere una circonferenza di centro  $O$ . Una retta parallela al lato  $AB$  passante per  $O$  interseca i lati  $AD$  e  $BC$  nei punti  $P$  e  $Q$  rispettivamente.

Si dimostri che la lunghezza di  $PQ$  è  $1/4$  del perimetro di  $ABCD$ .

**Soluzione.** Prolunghiamo i lati  $BC$  e  $AD$  oltre il segmento  $CD$  e tracciamo un'altra parallela al lato  $AB$  tangente alla circonferenza inscritta al quadrilatero  $ABCD$ . Siamo allora  $R$  ed  $S$  i due punti in cui tale parallela incontra i prolungamenti dei lati e supponiamo che  $S$  sia interno al lato  $AD$  (l'altro caso è analogo, idem se  $RS$  coincide con  $CD$ ).

Si vede facilmente che la lunghezza di  $PQ$  è uguale alla media dei due segmenti  $AB$  e  $RS$ , se dimostriamo che  $RS$  è lungo quanto  $CD$  otteniamo  $PQ = (AB + CD)/2$  ma quest'ultima lunghezza è un quarto del perimetro del quadrilatero, infatti possedendo una circonferenza inscritta ha la proprietà che la somma dei lati opposti è uguale.

Vediamo dunque che  $RS = CD$ . L'angolo  $\widehat{RSA}$  è complementare dell'angolo

in  $A$ , visto che  $RS$  e  $AB$  sono paralleli, ma l'angolo in  $A$  è complementare dell'angolo in  $C$ , poiché il quadrilatero è inscritto in una circonferenza. Quindi  $\widehat{RSA} = \widehat{BCD}$  da cui si ha l'uguaglianza dei due segmenti bisettori  $SO$  e  $CO$ . Analogo ragionamento si può fare per l'angolo  $\widehat{SRB}$  ottenendo che  $\widehat{SRB} = \widehat{ADC}$  e l'uguaglianza dei due segmenti bisettori  $RO$  e  $DO$ . A questo punto abbiamo tutti gli elementi per concludere che i due triangoli  $SOR$  e  $COD$  sono congruenti in quanto hanno due lati e i tre angoli uguali, segue ovviamente che  $SR = CD$ .

**Esercizio 4.** Abbiamo un cubo di lato 8, costituito da 512 cubetti, una “mossa” consiste di muoversi in un cubetto che dista lungo i tre assi  $xyz$  (in un ordine qualunque) di 2 poi 1 poi 2 spazi. Si dica se è possibile con queste mosse partire da un cubetto d'angolo del cubo, “toccare” tutti i cubetti una ed una sola volta e arrivare al cubetto nell'angolo opposto a quello iniziale sulla stessa faccia del cubo (un cubetto si intende “toccato” se è il punto di partenza o di arrivo di una “mossa”).

**Soluzione.** Coloriamo in modo alternato bianco e nero i 512 cubetti del cubo, si noti che allora due cubetti d'angolo opposti su di una stessa faccia del cubo hanno lo stesso colore. Si noti poi che per ogni mossa possibile, il cubetto di partenza e il cubetto d'arrivo hanno colori differenti. Se fosse possibile toccare tutti i cubetti una ed una sola volta, si dovrebbero fare 511 mosse, quindi (essendo 511 dispari) si cambierebbe colore un numero dispari di volte, da cui il cubetto finale avrebbe colore diverso da quello iniziale, il che è una contraddizione.

**Esercizio 5.** Si trovino tutte le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfino l'uguaglianza

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

per ogni coppia di numeri reali  $x$  ed  $y$ .

**Soluzione.** Le uniche funzioni che soddisfano la condizione sono  $f(x) = x$  e  $f(x) = x + 1$ .

Supponiamo  $x = 0$ , segue che per ogni  $y \in \mathbb{R}$  si ha

$$f(y^2) = (f(0))^2 + y^2.$$

Sia ora  $y = 0$ , quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$f(x^2) = (f(x))^2 - 2xf(0)$$

infine se  $x = y$  si ha

$$f(0) = (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = (f(x) - x)^2.$$

Ponendo  $x = y = 0$  segue che  $f(0) = f(0)^2$  da cui si hanno due casi:  $f(0) = 0$  o  $f(0) = 1$ .

1) Sia  $f(0) = 0$ . Allora dall'ultima equazione sopra segue immediatamente

$$f(x) = x.$$

2) Sia  $f(0) = 1$ . Segue che  $f(x^2) = x^2 + 1$  e  $(f(x) - x)^2 = 1$ , inoltre eguagliando le prime due equazioni si ha  $1 + x^2 = (f(x))^2 - 2x$  che implica  $(f(x))^2 = (1 + x)^2$ . Usando ora quest'ultima relazione con la precedente si ha  $-2xf(x) + x^2 + 1 + x^2 + 2x = 1$ , da cui,  $2xf(x) = 2x^2 + 2x$  che implica  $f(x) = x + 1$ .

**Esercizio 6.** Si determinino tutte le quintuple  $(a, b, c, d, e)$  di numeri primi distinti tra loro tali che

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2.$$

**Soluzione.** Ovviamente i cinque numeri primi non possono essere tutti dispari, quindi almeno uno di essi è il numero 2 e gli altri sono dispari. Inoltre, ogni quadrato di un numero dispari dà resto 1 diviso per 4, il che implica che 2 deve essere uno tra  $c, d, e$ .

Ci riduciamo quindi a cercare 4 primi dispari tali che

$$a^2 + b^2 = 4 + d^2 + e^2.$$

Il resto della divisione per 8 del quadrato di un numero dispari è sempre 1, si vede allora facilmente che nessuna quaterna di numeri dispari può soddisfare questa equazione. Di conseguenza non ci sono quintuple di primi che soddisfano l'equazione iniziale.