

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
A.A. 2009–2010
(corsi di laurea *diversi* da Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Soluzioni degli Esercizi

Esercizio 1. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali con almeno tre monomi non nulli. Si provi che il suo cubo ha almeno quattro monomi non nulli.

Soluzione. Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k$, con a_n e a_k diversi da zero e almeno un altro dei coefficienti diverso da zero. Sia a_i il coefficiente più alto, escluso a_n , diverso da zero e a_j il coefficiente più basso, escluso a_k , diverso da zero (si noti che può essere $i = j$).

Si hanno dunque due casi: o $i > j$ e $p(x) = a_n x^n + a_i x^i + q(x) + a_j x^j + a_k x^k$, dove $q(x) = r(x)x^{j+1}$ con r di grado $i - j - 2$ al massimo, oppure $p(x) = a_n x^n + a_i x^i + a_k x^k$. Facendo il cubo di $p(x)$ si vede facilmente che nel primo caso $[p(x)]^3$ contiene almeno i quattro monomi non nulli $a_n^3 x^{3n}$, $3a_n^2 a_i x^{2n+i}$, $3a_j a_k^2 x^{j+2k}$, $a_k^3 x^{3k}$; nel secondo caso, almeno i monomi $a_n^3 x^{3n}$, $3a_n^2 a_i x^{2n+i}$, $3a_i a_k^2 x^{i+2k}$, $a_k^3 x^{3k}$ sono non nulli.

Esercizio 2. Ogni punto del piano è colorato di bianco o di nero. Si dimostri che esiste sempre un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che tale triangolo “monocolore” non esista.

Siano A e B due punti dello stesso colore, diciamo bianco. Ci sono nel piano solo due possibili punti C e C' , simmetrici rispetto al segmento AB tali che il triangolo ABC sia equilatero, quindi sia C che C' devono essere neri. Questo implica che il punto D , che sta sulla retta per AB e tale che $DA = 2DB$ (B sta tra A e D), deve essere bianco altrimenti il triangolo $CC'D$, che è equilatero, sarebbe “monocolore”.

Ripetendo allora il ragionamento precedente, il punto E che sta dalla stessa parte di C rispetto alla retta per AB e tale che il triangolo DBE sia equilatero deve anch'esso essere nero.

Considerando ora il punto F intersezione della retta per A e C e della retta per D e E , vediamo che entrambi i triangoli ADF e CEF sono equilateri ma il primo ha i vertici della base A e D bianchi, il secondo ha i vertici della base C ed E entrambi neri, questo porta chiaramente ad una contraddizione non potendo quindi essere F né bianco, né nero.

Esercizio 3. Sia $ABCD$ un quadrilatero con i vertici su di una circonferenza in cui si possa inscrivere una circonferenza di centro O . Una retta parallela al lato AB passante per O interseca i lati AD e BC nei punti P e Q rispettivamente.

Si dimostri che la lunghezza di PQ è $1/4$ del perimetro di $ABCD$.

Soluzione. Prolunghiamo i lati BC e AD oltre il segmento CD e tracciamo un'altra parallela al lato AB tangente alla circonferenza inscritta al quadrilatero $ABCD$. Siamo allora R ed S i due punti in cui tale parallela incontra i prolungamenti dei lati e supponiamo che S sia interno al lato AD (l'altro caso è analogo, idem se RS coincide con CD).

Si vede facilmente che la lunghezza di PQ è uguale alla media dei due segmenti AB e RS , se dimostriamo che RS è lungo quanto CD otteniamo $PQ = (AB + CD)/2$ ma quest'ultima lunghezza è un quarto del perimetro del quadrilatero, infatti possedendo una circonferenza inscritta ha la proprietà che la somma dei lati opposti è uguale.

Vediamo dunque che $RS = CD$. L'angolo \widehat{RSA} è complementare dell'angolo in A , visto che RS e AB sono paralleli, ma l'angolo in A è complementare dell'angolo in C , poiché il quadrilatero è inscritto in una circonferenza. Quindi $\widehat{RSA} = \widehat{BCD}$ da cui si ha l'uguaglianza dei due segmenti bisettori SO e CO . Analogo ragionamento si può fare per l'angolo \widehat{SRB} ottenendo che $\widehat{SRB} = \widehat{ADC}$ e l'uguaglianza dei due segmenti bisettori RO e DO . A questo punto abbiamo tutti gli elementi per concludere che i due triangoli SOR e COD sono congruenti in quanto hanno due lati e i tre angoli uguali, segue ovviamente che $SR = CD$.

Esercizio 4. Si dica se è possibile, muovendosi come un cavallo degli scacchi, partire da un angolo della scacchiera 8×8 , “toccare” tutte le caselle una ed una sola volta e arrivare alla casella nell'angolo opposto a quello iniziale.

La mossa del cavallo consiste in muovere di due caselle in una direzione e poi di una casella in una direzione ortogonale.

Una casella si intende “toccata” se è il punto di partenza o di arrivo di una “mossa” completa.

Soluzione. Si noti che due caselle d'angolo opposte della scacchiera hanno lo stesso colore. Si noti poi che per ogni mossa del cavallo, il cubetto di partenza e il cubetto d'arrivo hanno colori differenti.

Se fosse possibile toccare tutti i cubetti una ed una sola volta, si dovrebbero fare 63 mosse, quindi (essendo 63 dispari) si cambierebbe colore un numero dispari di volte, da cui il cubetto finale avrebbe colore diverso da quello iniziale, il che è una contraddizione.