

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
A.A. 2009–2010
(corsi di laurea di Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)
22 Settembre 2009

Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.

Esercizio 1. Su un foglio a quadretti è disegnata la pianta quadrata di una casa di lato 10, con i bordi e i muri interni che stanno solo sui lati dei quadretti.

Si provi che se la lunghezza totale dei muri interni è maggiore di 81 allora la casa ha due “ambienti” non comunicanti tra loro.

Esercizio 2. Ogni punto del piano è colorato di bianco o di nero.

- Si dimostri che esiste sempre un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.
- Si dimostri che si possono sempre trovare 4 punti dello stesso colore tali che uno di questi punti sia il baricentro del triangolo formato dagli altri 3.

Esercizio 3. Sia $ABCD$ un quadrilatero con i vertici su di una circonferenza in cui si possa inscrivere una circonferenza di centro O . Una retta parallela al lato AB passante per O interseca i lati AD e BC nei punti P e Q rispettivamente.

Si dimostri che la lunghezza di PQ è $1/4$ del perimetro di $ABCD$.

Esercizio 4. Abbiamo un cubo di lato 8, costituito da 512 cubetti, una “mossa” consiste di muoversi in un cubetto che dista lungo i tre assi xyz (in un ordine qualunque) di 2 poi 1 poi 2 spazi. Si dica se è possibile con queste mosse partire da un cubetto d'angolo del cubo, “toccare” tutti i cubetti una ed una sola volta e arrivare al cubetto nell'angolo opposto a quello iniziale sulla stessa faccia del cubo (un cubetto si intende “toccato” se è il punto di partenza o di arrivo di una “mossa”).

Esercizio 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfino l'uguaglianza

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

per ogni coppia di numeri reali x ed y .

Esercizio 6. Si determinino tutte le quintuple (a, b, c, d, e) di numeri primi distinti tra loro tali che

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2.$$