

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica
(candidati degli altri corsi di laurea)

18 Settembre 2007

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, apparecchi elettronici o cellulari.
Nella valutazione si terrà conto del numero di risposte sbagliate.**

ESERCIZIO 1.

In un'aula ci sono 15 ragazzi e 15 ragazze. Si considerino le seguenti asserzioni:

(A) *ogni ragazzo nell'aula è minorenni e nessuna ragazza lo è*

(B) *ogni ragazzo nell'aula è minorenni e qualche ragazza lo è*

Si indichi (barrando la casella a lato) quali dei seguenti enunciati equivalgono alla negazione di **(A)**:

- ☐ Nell'aula c'è almeno un ragazzo maggiorenne ed almeno una ragazza minorenni
- ☐ Nell'aula non c'è alcun ragazzo minorenni oppure non c'è alcuna ragazza maggiorenne
- ☐ Nell'aula non c'è alcun ragazzo minorenni e non c'è alcuna ragazza maggiorenne
- ☐ Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora non tutte le ragazze lo sono
- ☐ Nessuno degli enunciati precedenti equivale alla negazione di (A)

Si indichi ora (barrando la casella a lato) quali dei seguenti enunciati equivalgono alla negazione di **(B)**:

- ☐ Nell'aula non ci sono ragazze minorenni e non tutti i ragazzi lo sono
- ☐ Nell'aula tutti i ragazzi sono maggiorenni e qualche ragazza lo è
- ☐ Nell'aula tutti i ragazzi sono maggiorenni oppure qualche ragazza lo è
- ☐ Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora qualche ragazza lo è
- ☐ Nessuno degli enunciati precedenti equivale alla negazione di (B)

ESERCIZIO 2

Una coltura di cellule contiene inizialmente 100 cellule e, dopo ogni ciclo riproduttivo, il numero di cellule raddoppia.

- a. Dire quante cellule vi saranno nella coltura dopo 20 cicli riproduttivi;
- b. calcolare le prime due cifre decimali di $\log_{10} 2$;
- c. quanti cicli sono (teoricamente) necessari perché vi siano almeno 100 miliardi di cellule?

Suggerimento per b. Verificare che $10^{4/13} > 2$.

ESERCIZIO 3

Siano C_1, C_2 due circonferenze di raggio R , passanti ognuna per il centro dell'altra. Calcolare l'area della regione di piano interna ad entrambe.

ESERCIZIO 4 Calcolare:

- a. la probabilità di fare 13 al Totocalcio compilando 10 colonne diverse a caso;
- b. la probabilità di fare una cinquina giocando cinque numeri al Lotto;
- c. la probabilità di fare una cinquina giocando sei numeri al Lotto;
- d. la probabilità di avere un Poker d'assi servito con un mazzo di carte che vanno dal 7 all'asso;
- e. la probabilità di avere un Poker servito con lo stesso mazzo di carte.

Note:

- Il *Totocalcio* si assimila qui ad un gioco in cui il giocatore compila una colonna di 13 simboli scelti nell'insieme $S = \{1, 2, X\}$, quindi si procede a 13 estrazioni con reinserimento da tale insieme di simboli (supposti equiprobabili); si "fa tredici" nel caso in cui i tredici simboli estratti coincidono, nell'ordine, con la colonna di 13 simboli scelti dal giocatore.

- Nel *Lotto* il giocatore sceglie n numeri tra 90 contenuti in un'urna, quindi ne vengono estratti (senza reinserimento) 5; si ottiene una cinquina se i cinque numeri estratti compaiono tra gli n numeri scelti.

- Nel *Poker*, si distribuiscono ad ogni giocatore (senza reinserimento) cinque carte da un mazzo di carte francesi (contraddistinte, nel caso del nostro problema, dai simboli 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, ciascuna in 4 possibili colori diversi); un giocatore ha un "poker d'assi servito" nel caso abbia, tra le cinque carte che riceve, quattro carte contraddistinte dal simbolo A (nei quattro differenti colori); il giocatore ha un semplice "poker servito" se ha 4 carte con lo stesso simbolo.

ESERCIZIO 5

Tizio, Caio e Sempronio viaggiano dal Cairo a Luxor percorrendo la stessa strada e partendo nello stesso momento. Tizio tiene una velocità costante v . Caio tiene la stessa velocità costante v , ad eccezione di un tratto in cui è costretto a viaggiare ad una velocità ridotta del 25% per 40', e di un secondo tratto in cui, per recuperare, viaggia per altri 40' ad una velocità del 25% superiore a v . Anche Sempronio, come Caio, tiene sempre la stessa velocità costante v ad eccezione di un tratto in cui per 40' viaggia ad una velocità ridotta del 25%; lui, però, per recuperare, calcola i chilometri K perduti rispetto a Tizio nei 40' in cui ha viaggiato a velocità ridotta, e decide di percorrerne altri K ad una velocità del 25% superiore a v .

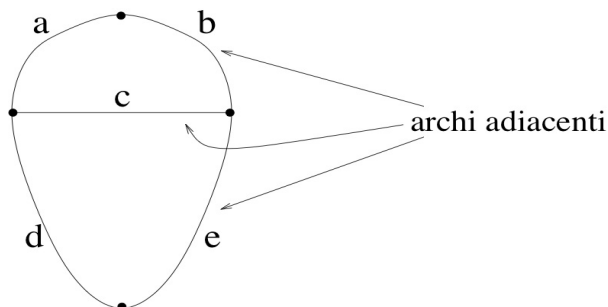
Stabilire, se possibile:

- a. L'ordine di arrivo a Luxor;
- b. i rispettivi ritardi.

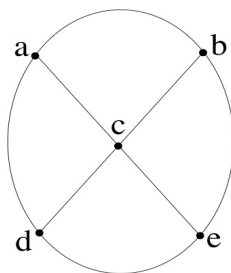
Nota. Si suppone che la velocità v sia tale da non consentire di arrivare a Luxor in meno di 80', e si trascurano le accelerazioni necessarie per cambiare di velocità.

ESERCIZIO 6

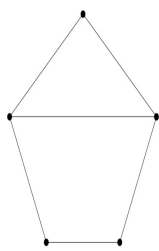
Un *grafo* è una figura G costituita da un insieme di punti (detti *vertici*) ed un insieme di linee *non intersecantesi* (dette *archi*), che uniscono alcuni dei vertici tra loro. Due archi distinti di G si dicono *adiacenti* se hanno un vertice in comune:



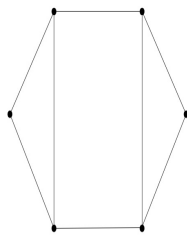
Assegnato un grafo G , a partire da esso si può sempre costruire un nuovo grafo G' (detto *grafo di adiacenza di G*), così definito: G' ha un vertice per ogni arco di G , e due vertici di G' sono uniti da un arco se e solo se gli archi corrispondenti di G sono adiacenti. Per esempio, se G è il grafo della figura precedente, il grafo G' è:



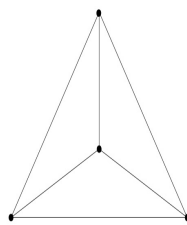
Disegnare il grafo di adiacenza per ognuno dei seguenti quattro grafi (etichettando opportunamente i lati di G_i e i vertici corrispondenti di G'_i):



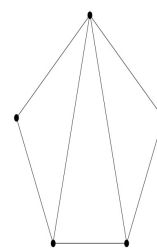
G_1



G_2



G_3



G_4

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica
(candidati ai corsi di laurea di indirizzo Matematico, Fisico, Informatico e di Ingegneria)

18 Settembre 2007

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, apparecchi elettronici o cellulari.
Giustificare ogni risposta con una dimostrazione o un controesempio.
*Risposte e ragionamenti errati danno luogo a punti negativi.***

ESERCIZIO 1.

In un'aula ci sono 15 ragazzi e 15 ragazze. Si considerino le seguenti asserzioni:

(A) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e nessuna ragazza lo è*

(B) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e qualche ragazza lo è*

Per ciascuno degli enunciati che seguono, si barri la prima casella nel caso l'enunciato equivalga alla negazione di (A), e si barri la seconda casella nel caso l'enunciato equivalga alla negazione di (B).

$\neg A$ $\neg B$

Nell'aula c'è almeno un ragazzo maggiorenne ed almeno una ragazza minorenne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

Nell'aula non ci sono ragazze minorenni e non tutti i ragazzi lo sono	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

Nell'aula non c'è alcun ragazzo minorenne oppure non c'è alcuna ragazza maggiorenne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

Nell'aula tutti i ragazzi sono maggiorenni e qualche ragazza lo è	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

Nell'aula non c'è alcun ragazzo minorenne e non c'è alcuna ragazza maggiorenne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	--------------------------	--------------------------

Nell'aula tutti i ragazzi sono maggiorenni oppure qualche ragazza lo è	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	--------------------------	--------------------------

Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora non tutte le ragazze lo sono	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora qualche ragazza lo è	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	--------------------------	--------------------------

ESERCIZIO 2

Sia n un numero pari maggiore di 3000. Dimostrare o confutare le seguenti asserzioni, barrando opportunamente le caselle a lato di ognuna di esse:

	Vero	Falso
$(n-1)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(n-2)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(n-3)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{n}{2}+1)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{n}{2})!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{n}{2}-1)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{n}{2}-2)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\frac{n}{2}-3)!$ è divisibile per n	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nota: $n!$ è il numero ottenuto moltiplicando tra loro tutti gli interi tra 1 e n .

ESERCIZIO 3.

Si consideri un cerchio \mathcal{C} di centro O e raggio 1; l'*inversione* rispetto al cerchio \mathcal{C} è quella trasformazione che manda ogni punto P del piano, a distanza r da O , nel punto P^* , a distanza $1/r$ da O , giacente sulla semiretta uscente da O e contenente P (questa trasformazione non è definita nel punto O).

Si consideri ora una circonferenza \mathcal{C} di raggio 1, si inscriva in \mathcal{C} un quadrato Q , e si tracci la circonferenza \mathcal{C}' avente per diametro precisamente uno dei lati del quadrato Q . L'inversione rispetto a \mathcal{C} trasforma la circonferenza \mathcal{C}' in:

- a. una retta;
- b. una circonferenza;
- c. una parabola;
- d. un'iperbole;
- e. nessuna delle precedenti.

ESERCIZIO 4

Gigi e Mario giocano a testa o croce e ognuno di loro lancia n volte una moneta.

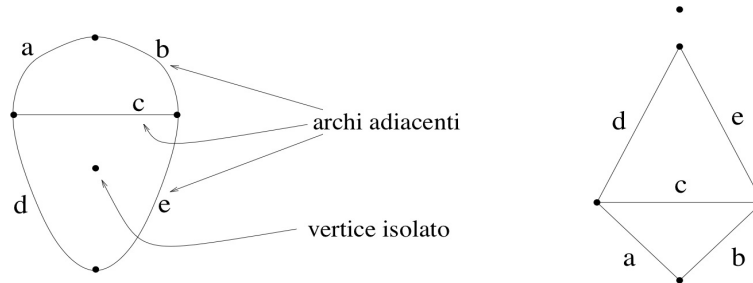
- a. Calcolare la probabilità che Gigi ha di ottenere k volte testa;
- b. calcolare la probabilità che Gigi e Mario ottengano lo stesso numero di teste;
- c. quest'ultimo evento è più o meno probabile di ottenerne un numero diverso?
- d. Ammettiamo ora che Mario lanci la moneta una volta in più di Gigi, ma che in caso di parità la vittoria sia attribuita a Gigi. Chi dei due è avvantaggiato?

ESERCIZIO 5

Un *grafo* è una figura G costituita da un insieme di punti (detti *vertici*) ed un insieme di linee *non intersecantesi* (dette *archi*), che uniscono alcuni dei vertici tra loro.

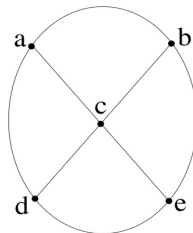
Terminologia:

- due archi distinti di G si dicono *adiacenti* se hanno un vertice in comune;
- un vertice si dice *isolato* se nessun arco parte da esso;
- due grafi sono considerati *uguali* se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro vertici e i loro archi, e vertici corrispondenti sono uniti da archi corrispondenti

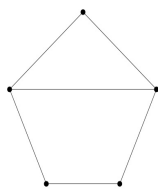


Esempio: due grafi uguali.

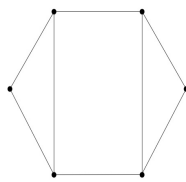
Assegnato un grafo G , a partire da esso si può sempre costruire un nuovo grafo G' (detto *grafo di adiacenza di G*), così definito: G' ha un vertice per ogni arco di G , e due vertici di G' sono uniti da un arco se e solo se gli archi corrispondenti di G sono adiacenti. Per esempio, se G è il grafo della figura precedente, il grafo G' è:



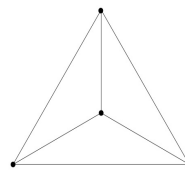
- a. Disegnare il grafo di adiacenza per ognuno dei seguenti quattro grafi (etichettando opportunamente i lati di G_i e i vertici corrispondenti di G'_i):



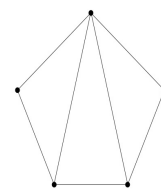
G_1



G_2



G_3



G_4

- b. Disegnare dei grafi g_1, g_2, g_3, g_4 i cui grafi di adiacenza siano rispettivamente uguali a G_1, G_2, G_3, G_4 ;
- c. Esistono due grafi diversi, entrambi senza vertici isolati, che hanno lo stesso grafo di adiacenza?
- d. Esiste un grafo X che non è il grafo di adiacenza di alcun grafo?

ESERCIZIO 6

Sia $y = px + q$ l'equazione di una retta r assegnata nel piano cartesiano. Un punto $P = (x, y)$ di r si dice un *punto razionale* se le sue coordinate sono entrambe dei numeri razionali; il punto P si dice invece *irrazionale* se entrambe le sue coordinate sono numeri irrazionali.

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

	Vero	Falso
r ha sempre almeno un punto razionale	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
r ha sempre almeno un punto irrazionale	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha un punto razionale, allora ne ha infiniti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha un punto irrazionale, allora ne ha infiniti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha due punti razionali, allora ne ha infiniti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha due punti irrazionali, allora ne ha infiniti	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha un punto razionale, allora ha anche un punto irrazionale	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
se r ha un punto irrazionale, allora ha anche un punto razionale	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>