

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica

(candidati degli altri corsi di laurea)

18 Settembre 2007

**Soluzioni degli esercizi proposti.**

**ESERCIZIO 1.**

In un'aula ci sono 15 ragazzi e 15 ragazze. Si considerino le seguenti asserzioni:

(A) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e nessuna ragazza lo è*

(B) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e qualche ragazza lo è*

Denotiamo come segue le seguenti asserzioni:

(A<sub>1</sub>) *Ogni ragazzo nell'aula è minorenne*

(A<sub>2</sub>) *Ogni ragazza nell'aula è maggiorenne*

Dunque,  $A = A_1 \wedge A_2$  mentre  $B = A_1 \wedge \neg A_2$ .

La negazione di  $A$  è dunque:  $\neg A_1 \vee \neg A_2$ , che equivale a:  $A_1 \Rightarrow \neg A_2$ .

Questa asserzione si esprime a parole come:

*“Se nell'aula ogni ragazzo è minorenne, allora c'è almeno una ragazza minorenne”*  
che equivale a dire:

☒ *Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora non tutte le ragazze lo sono*

Questa era l'unica risposta che equivaleva alla negazione di  $A$ .

D'altra parte, la negazione di  $B$  è:  $\neg A_1 \vee A_2$ , cioè, a parole:

*“Nell'aula c'è almeno un ragazzo maggiorenne, oppure tutte le ragazze lo sono”*  
che non è equivalente a nessuna delle risposte proposte. La risposta esatta alla seconda domanda era dunque:

☒ *Nessuno degli enunciati precedenti equivale alla negazione di B*

**ESERCIZIO 2**

La coltura di cellule contiene inizialmente 100 cellule e, dopo ogni ciclo riproduttivo, il numero di cellule raddoppia. Pertanto, dopo l' $n$ -simo ciclo riproduttivo, le cellule saranno  $N = 100 \cdot 2^n$ .

a. Dopo 20 cicli, le cellule saranno  $100 \cdot 2^{20}$ .

b. Per rispondere alla domanda c, è utile calcolare  $\log_{10} 2$ . Come suggerito, si ha  $10^{\frac{4}{13}} > 2$ , poiché  $10^4 = 10000 > 2^{13} = 8192$ . D'altronde, si ha anche facilmente che  $10^{\frac{3}{10}} < 2$ , poiché  $10^3 = 1000 < 2^{10} = 1024$ . . Pertanto:

$$0,30 = 3/10 < \log_{10} 2 < 4/13 = 0,307\dots$$

che ci dice che l'approssimazione di  $\log_{10} 2$  alle prime due cifre decimali è data da 0,30.

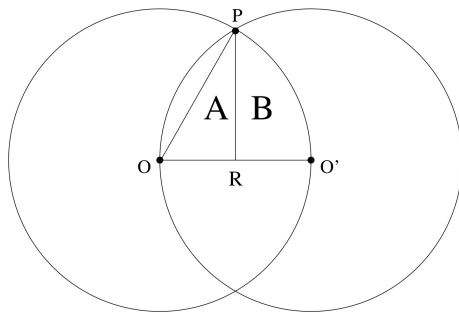
c. Dobbiamo trovare il più piccolo intero  $n$  per cui  $N = 100 \cdot 2^n \geq 100 \cdot 10^9$ . Questo equivale a risolvere la disequazione  $n \cdot \log_{10} 2 \geq 9$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Il calcolo fatto al punto b dà:

$$29,25 = 117/4 = 9/(4/13) < 9/\log_{10} 2 < 9/(3/10) = 30$$

pertanto il minimo intero  $n$  che va bene è  $n = 30$ .

**ESERCIZIO 3**

L'area cercata è quattro volte l'area della regione denotata con  $B$  in figura:



Poiché il triangolo  $OPO'$  è equilatero, l'angolo che sottende l'arco  $PO'$  è uguale a  $\pi/3$ , dunque l'area della regione  $A \cup B$  è

$$\text{Area}(A \cup B) = \frac{1}{6}\pi R^2$$

D'altronde l'area della regione  $A$  (metà triangolo equilatero di lato  $R$ ) è

$$\text{Area}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{8} R^2$$

Dunque  $\text{Area}(B) = \text{Area}(A \cup B) - \text{Area}(A) = (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8})R^2$ , e l'area cercata è  $(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})R^2$ .

**ESERCIZIO 4** La probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli (cioè i casi in cui l'evento si verifica) rispetto a tutti quelli possibili. Dunque:

a. Casi possibili:  $3^{13}$  (il numero delle possibili schedine). Casi favorevoli: 10 (le schedine giocate). La probabilità in questo caso è  $P = 10/3^{13}$ .

b. Casi possibili:  $\binom{90}{5}$  (numero di combinazioni di 5 numeri scelti tra 90). Casi favorevoli: 1 solo (l'unica combinazione di 5 numeri su cui si è puntato). In questo caso la probabilità è  $P = \binom{90}{5}^{-1}$ .

c. Casi possibili, come prima:  $\binom{90}{5}$ . Casi favorevoli: 6 (numero di combinazioni di 5 numeri ottenibili dai 6 su cui si è puntato). La probabilità è  $P = 6 \cdot \binom{90}{5}^{-1}$ .

d. Casi possibili:  $\binom{32}{5}$  (numero di combinazioni di 5 carte scelte tra le 32 del mazzo). Casi favorevoli: 28 (numero di possibilità di avere un poker d'assi in mano: una per ognuna delle  $32 - 4$  carte che restano, togliendo gli assi). La probabilità è  $P = 28 \cdot \binom{32}{5}^{-1}$ .

e. Casi possibili, come prima:  $\binom{32}{5}$ . Casi favorevoli: 224 (cioè 8, i tipi possibili di poker, per 28, le possibilità di avere un particolare tipo di poker fissato in mano). La probabilità è  $P = 224 \cdot \binom{32}{5}^{-1}$ .

### ESERCIZIO 5

Tizio viaggia a velocità costante  $v$ . Caio e Sempronio viaggiano ad una velocità di  $\Delta v = \frac{1}{4}v$  maggiore o minore rispetto a Tizio, nei due tratti in cui non procedono a velocità  $v$ . Ciò dura, nel caso di Caio, per il tempo  $2\Delta t = 2 \cdot 40'$ . Lo spazio percorso da Caio a velocità diversa da  $v$  è uguale a quello percorso da Tizio nello stesso tempo:

$$(v - \Delta v)\Delta t + (v + \Delta v)\Delta t = v \cdot 2\Delta t$$

Poiché nel tempo restante essi procedono a ugual velocità, Tizio e Caio arrivano insieme. Sempronio, invece, procede a velocità diversa da  $v$  per il tempo  $\Delta t + \Delta't$ , dove  $\Delta't$  è il tempo per il quale gli è necessario viaggiare a velocità  $v + \Delta v$  per recuperare i chilometri persi rispetto a Tizio nel primo tratto: cioè

$$(v + \Delta v)\Delta't = v\Delta t - (v - \Delta v)\Delta t$$

Pertanto, in totale, lo spazio percorso da Sempronio a velocità diversa da  $v$  è

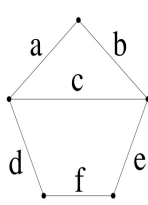
$$\Delta s = (v - \Delta v)\Delta t + (v + \Delta v)\Delta't = v\Delta t$$

Tizio percorre lo stesso spazio  $\Delta s$  nel tempo  $\Delta s/v = \Delta t$ , che è minore del tempo  $\Delta t + \Delta't$  impiegato da Sempronio; poiché nel resto del viaggio (la distanza dal Cairo a Luxor meno  $\Delta s$ ) i due vanno ad uguale velocità, se ne deduce che Sempronio arriva in ritardo rispetto a Tizio, e precisamente di

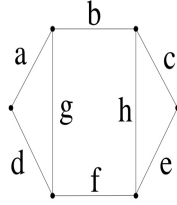
$$\Delta't = \frac{v\Delta t - (v - \Delta v)\Delta t}{v + \Delta v} = \frac{\Delta t}{1 + v/\Delta v} = \frac{40'}{4 + 1} = 8'.$$

### ESERCIZIO 6

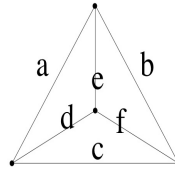
I grafi di adiacenza  $G'_i$  dei grafi  $G_i$  sono:



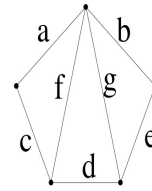
$G_1$



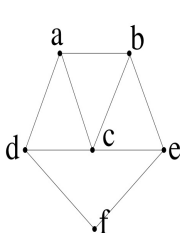
$G_2$



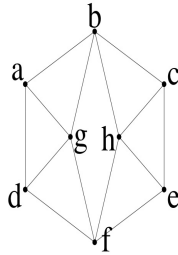
$G_3$



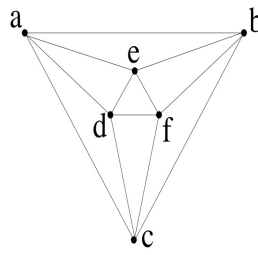
$G_4$



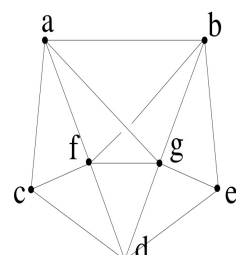
$G_1'$



$G_2'$



$G_3'$



$G_4'$

Si noti che l'ultimo non ha una realizzazione sul piano, e va pensato immerso nello spazio tridimensionale.

SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali - Prova di Matematica e Logica  
(candidati ai corsi di laurea di indirizzo Matematico, Fisico, Informatico e di Ingegneria)

18 Settembre 2007

**Soluzioni degli esercizi proposti.**

**ESERCIZIO 1.**

In un'aula ci sono 15 ragazzi e 15 ragazze. Si considerino le seguenti asserzioni:

(A) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e nessuna ragazza lo è*

(B) *ogni ragazzo nell'aula è minorenne e qualche ragazza lo è*

Denotiamo come segue le seguenti asserzioni:

(A<sub>1</sub>) *Ogni ragazzo nell'aula è minorenne*

(A<sub>2</sub>) *Ogni ragazza nell'aula è maggiorenne*

Dunque,  $A = A_1 \wedge A_2$  mentre  $B = A_1 \wedge \neg A_2$ .

La negazione di B è:  $\neg A_1 \vee A_2$ . Cioè, a parole:

*“Nell'aula c'è almeno un ragazzo maggiorenne, oppure tutte le ragazze lo sono”*  
che non è equivalente a nessuna delle risposte proposte.

La negazione di A è invece:  $\neg A_1 \vee \neg A_2$ . Ciò equivale a:  $A_1 \Rightarrow \neg A_2$ .

Questa asserzione si esprime a parole come:

*“Se nell'aula ogni ragazzo è minorenne, allora c'è almeno una ragazza minorenne”*  
ovvero

*“Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora non tutte le ragazze lo sono”*  
Dunque la risposta, e l'unica, che andava barrata era:

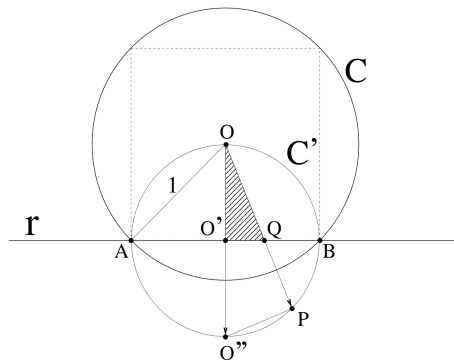
	$\neg A$	$\neg B$
<i>Se nell'aula non c'è alcun ragazzo maggiorenne, allora non tutte le ragazze lo sono</i>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**ESERCIZIO 2**

Sia  $n$  un numero pari maggiore di 5. Allora, ogni numero  $N \geq (\frac{n}{2})!$  è divisibile per  $n$ : infatti  $n/2$  e 2 sono due fattori distinti di  $(\frac{n}{2})!$ . Quindi le prime 5 asserzioni erano tutte giuste. D'altra parte, se  $n = 2p$ , con  $p$  primo,  $n$  non divide alcun numero del tipo  $m!$  con  $m < p$ ; difatti, tra i fattori primi di  $m!$  non può esserci  $p$ . Quindi le ultime 3 asserzioni erano false.

**ESERCIZIO 3.**

Sia  $O'$  il centro di  $C'$ , e sia  $O''$  il punto diametralmente opposto ad  $O$  su  $C'$ .



L'inversione rispetto a  $\mathcal{C}$  trasforma il cerchio  $\mathcal{C}'$  (meno  $O$ ) nella retta  $r$  passante per i punti  $A, B$  di intersezione tra i due cerchi. Infatti, si noti innanzitutto che  $OO'' = 1/\overline{OO'} = \sqrt{2}$ : dunque l'inversione rispetto a  $\mathcal{C}$  manda il punto  $O''$  in  $O'$ . Inoltre, i punti d'intersezione  $A, B$  tra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  vengono mandati chiaramente in se stessi, in quanto  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ . Infine, se  $P$  è un qualsiasi punto di  $\mathcal{C}'$  (diverso a  $O$ ), si considerino i triangoli rettangoli  $OPO''$  e  $OO'Q$ . Poiché essi sono simili, si ha:

$$\overline{OQ} : \overline{OO'} = \overline{OO''} : \overline{OP}$$

cioè  $\overline{OQ} = (\overline{OO''} \cdot \overline{OO'}) / \overline{OP} = 1/\overline{OP}$ . Pertanto il punto  $P$  viene mandato dall'inversione rispetto a  $\mathcal{C}$  precisamente nel punto  $Q$ , che giace su  $r$ .

Se  $P$  si trova sull'arco  $\widehat{AB}$  di  $\mathcal{C}'$  contenente  $O$  il ragionamento è analogo.

#### ESERCIZIO 4

La probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli (cioè i casi in cui l'evento si verifica) rispetto a tutti quelli possibili. Dunque:

a. I casi possibili sono tanti quanti le possibili liste ordinate di lunghezza  $n$ , costituite da due simboli  $T, C$ ; indicheremo l'insieme di tutte queste liste con  $\mathcal{L}_n$ : sono  $2^n$ . I casi favorevoli corrispondono alle liste che contengono precisamente  $k$  volte il simbolo  $T$ ; sono tante quanti i possibili sottoinsiemi costituiti da  $k$  righe tra le  $n$  della lista:  $\binom{n}{k}$ .

La probabilità che Gigi ha di ottenere  $k$  volte testa è dunque  $P_k = \binom{n}{k} \cdot 2^{-n}$

b. La probabilità  $P'_k$  che Gigi e Mario ottengano entrambi esattamente  $k$  volte teste su  $n$  lanci è uguale al prodotto delle probabilità che ognuno di essi ottenga  $k$  teste su  $n$  lanci (eventi indipendenti), dunque:  $P'_k = P_k^2$ .

D'altra parte, la probabilità  $P$  che Gigi e Mario ottengano lo stesso numero (imprecisato) di teste su  $n$  lanci è data dalla somma delle probabilità che essi ottengano entrambi 0 teste su  $n$  lanci, più quella che ottengano entrambi 1 testa su  $n$  lanci, e così via fino ad  $n$  teste su  $n$  lanci (tutti eventi tra loro disgiunti). Pertanto:

$$P = \sum_{k=0}^n P_k^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

c. La probabilità che Gigi e Mario ottengano su  $n$  lanci un numero differente di teste è, per le stesse considerazioni del punto precedente:

$$Q = \sum_{k=1}^n P_k(1 - P_k)$$

dove  $(1 - P_k)$  è la probabilità che Mario *non* ottenga  $k$  teste su  $n$  lanci.

Si noti ora che, per ogni  $n$ ,  $\binom{n}{k} \leq \frac{1}{2} \cdot 2^n$ , e la disuguaglianza è stretta per almeno un  $k$  se  $n \geq 2$ ; ciò segue dalla ben nota formula

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

Pertanto,  $P_k \leq \frac{1}{2} \leq 1 - P_k$  sempre, e  $P = \sum_{k=1}^n P_k^2 < \sum_{k=1}^n P_k(1 - P_k) = Q$  se  $n \geq 2$ . Dunque, se Gigi e Mario effettuano ciascuno più di un lancio, la probabilità che ottengano un numero differente di teste è maggiore della probabilità che ne ottengano uno stesso numero. Se entrambi effettuano invece un solo lancio, la probabilità sarà chiaramente la stessa.

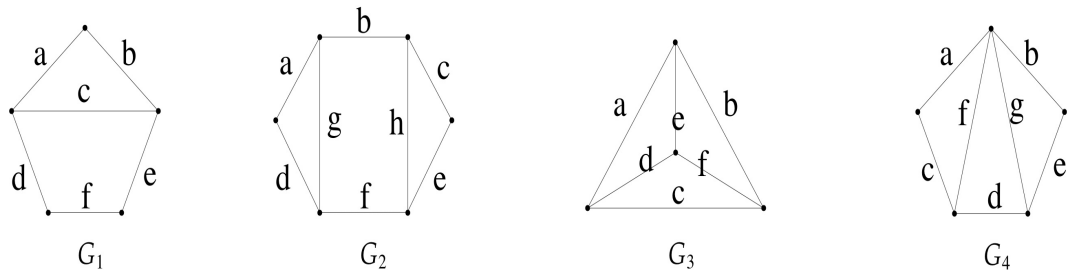
**d.** Indichiamo ora con  $p$  la probabilità che, dopo aver effettuato entrambi  $n$  lanci, Gigi e Mario siano in parità (stesso numero di teste); questa probabilità è stata calcolata in **b**, ma non dovremo ricorrere al suo valore numerico. Con le nuove regole, Mario vince in uno dei seguenti due casi (tra loro disgiunti):

- (i) in  $n$  lanci egli ha ottenuto più teste di Gigi;
- (ii) in  $n$  lanci ha ottenuto lo stesso numero di teste di Gigi, e all' $n$ -simo lancio ha testa.

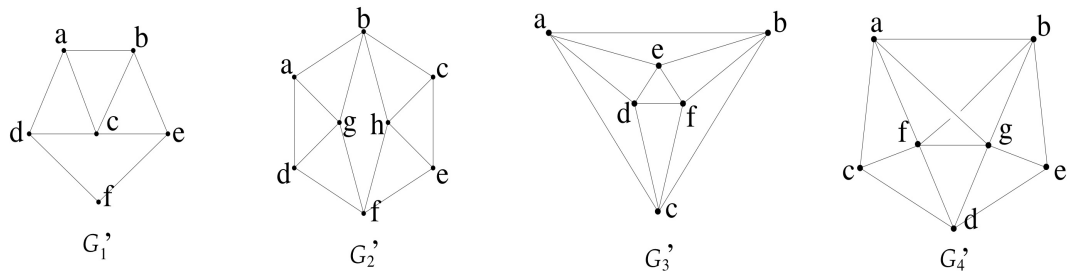
La probabilità del primo evento è la metà di  $(1 - p)$  (in quanto la probabilità che uno abbia ottenuto più teste dell'altro è uguale per entrambi). La probabilità del secondo evento è invece  $p \cdot \frac{1}{2}$  (essendo l' $(n + 1)$ -esimo lancio indipendente da quanto successo prima). Pertanto, la probabilità che Mario vinca secondo le nuove regole è uguale a  $(1 - p)/2 + p/2 = 1/2$ : nessuno dei due giocatori è quindi avvantaggiato.

### ESERCIZIO 5

Si etichettino gli archi dei grafi  $G_i$  assegnati nel seguente modo:

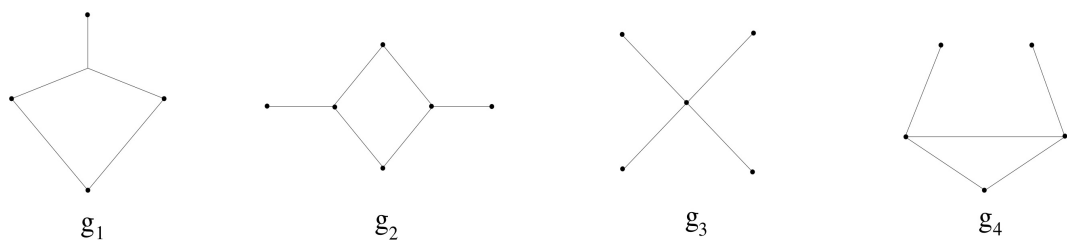


**a.** Allora i grafi adiacenza  $G'_i$  dei grafi  $G_i$  sono:

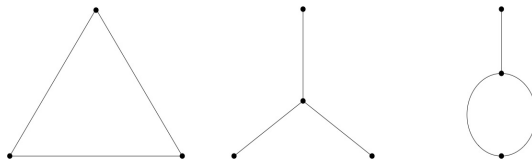


Si noti che l'ultimo non ha una realizzazione sul piano, e va pensato immerso nello spazio tridimensionale.

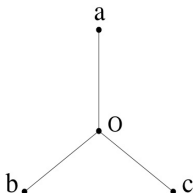
**b.** I seguenti grafi  $g_1, g_2, g_3, g_4$  hanno grafi di adiacenza rispettivamente uguali a  $G_1, G_2, G_3, G_4$ :



c. La risposta è positiva. Per esempio, i seguenti grafi non sono uguali ma hanno tutti lo stesso grafo di adiacenza:



d. La risposta è positiva, per esempio, il grafo  $G$  seguente:



non è il grafo di adiacenza di alcun grafo. Infatti se  $g$  fosse un grafo con  $g' = G$ , gli archi corrispondenti ai vertici  $a, b, c$  sarebbero tutti adiacenti all'arco corrispondente al vertice  $O$ . Pertanto almeno due tra essi dovrebbero essere tra loro adiacenti, che è escluso poiché non ci sono archi di  $G$  che uniscono direttamente  $a, b, c$ .

## ESERCIZIO 6

Una retta  $r : y = px + q$  nel piano cartesiano non ha sempre necessariamente un punto razionale, né un punto irrazionale. I casi  $r : y = \sqrt{2}$  e  $r : y = 0$  sono due controesempi evidenti. D'altra parte, esistono anche rette con un solo punto razionale:  $r : y = \sqrt{2}x$  (l'unico punto razionale è l'origine). Le prime tre asserzioni sono dunque false.

Gli esempi  $r : y = \sqrt{2}$  e  $r : y = 0$  mostrano anche che l'esistenza di un punto irrazionale (risp. razionale) non implica esistenza di un punto razionale (risp. irrazionale): le due ultime asserzioni sono quindi parimenti false.

Le altre tre asserzioni sono tutte vere: seguono dal fatto che se  $r$  ha un punto irrazionale, allora ne ha infiniti. Ciò può vedersi così.

Consideriamo come primo caso quello in cui  $r$  abbia un punto razionale  $P = (x_0, y_0)$ . Osserviamo allora che  $r$  avrà tanti punti razionali/irrazionali quanti ne ha la retta  $r'$  ottenuta traslando  $r$  in modo da far coincidere  $P$  con l'origine. Quindi, in questo primo caso, si può supporre che l'equazione di  $r$  sia  $y = px$ . Ora, se  $p \in \mathbb{Q}$ , esso sarà differente da 0 (altrimenti  $r$  non avrebbe alcun punto irrazionale), ed allora ogni  $x$  irrazionale darà luogo ad un punto irrazionale; se invece  $p \notin \mathbb{Q}$ , ogni ascissa del tipo  $x = k/p + 1$ , al variare di  $k$  intero, darà luogo ad un punto irrazionale.

Consideriamo ora l'altro caso possibile: quello in cui  $r$  non abbia alcun punto razionale. Allora,  $r : y = px + q$  con  $q \notin \mathbb{Q}$ . Se  $p \in \mathbb{Q}$ , ogni ascissa del tipo  $x = kq$ , con  $k$  intero, darà luogo ad un punto irrazionale (in quanto  $y = (pk + 1)q \notin \mathbb{Q}$ ). Se invece  $p \notin \mathbb{Q}$ , otterremo infiniti punti razionali prendendo  $x = k/p$ , con  $k$  intero (in quanto  $y = k + q \notin \mathbb{Q}$ ).