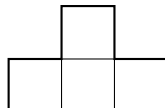


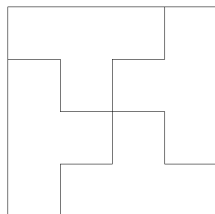
SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
A.A. 2015–2016
(Corsi di Laurea di Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Soluzioni degli Esercizi

Esercizio 1. Quali quadrati di lato intero si possono costruire con delle tessere della forma seguente, tenendo presente che ogni quadratino ha lato 1?



Soluzione. Si può costruire nel seguente modo il quadrato di lato 4 e con esso facilmente anche tutti i quadrati con lato divisibile per 4.



Dato che le tessere hanno area 4, il lato di ogni quadrato costruibile non può essere dispari, quindi resta da stabilire se i quadrati di lato pari e non divisibile per 4 siano costruibili o no. Si noti che un tale quadrato deve essere costruito con un numero dispari di tessere.

Supponiamo di essere riusciti a costruirlo e immaginiamo che sia colorato a scacchiera, si vede allora che ogni tessera copre o 3 caselle bianche e una nera o 3 nere e una bianca, chiamiamo tessere *di tipo A* le prime e *di tipo B* le seconde. Supponiamo ci siano n tessere di tipo *A* e m tessere di tipo *B*, con $n + m$ dispari, per quanto detto sopra. Allora si avranno $3n + m$ caselle bianche e $3m + n$ caselle nere e questi due numeri devono essere uguali, segue facilmente che $n = m$, ma allora $n + m$ non può essere dispari, da cui l'assurdo e l'impossibilità di costruire tali quadrati di lato non divisibile per 4.

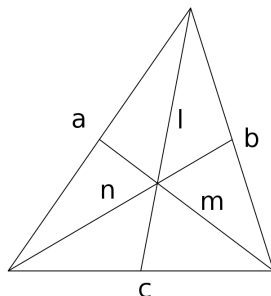
Esercizio 2. Dato un triangolo di lati di lunghezza a, b, c , siano m, n, l le lunghezze delle rispettive mediane. Si provi che

$$\frac{3}{4}(a + b + c) \leq m + n + l \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Soluzione. Si consideri il triangolo formato da un lato e dai tratti delle due mediane degli altri due lati dal vertice al baricentro. Per la disuguaglianza triangolare la somma di questi due tratti (ognuno lungo $2/3$ dell'intera mediana) è maggiore del lato. Ripetendo questo argomento per i tre lati e sommando le tre disuguaglianze ottenute si ottiene la disuguaglianza di sinistra.

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, ricordiamo il *teorema della mediana* che dice che

$$2l^2 = a^2 + b^2 - c^2/2.$$



Applicandolo alle tre mediane e sommando le disuguaglianze ottenute si conclude

$$m^2 + n^2 + l^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

dunque, per la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica,

$$m + n + l \leq 3\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + l^2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

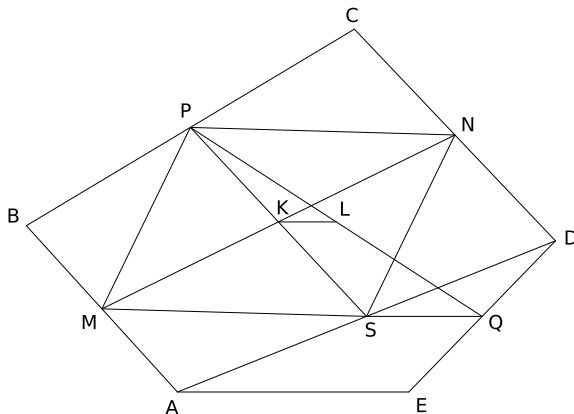
che è la tesi.

Si noti che la disuguaglianza è un'uguaglianza se e solo se le tre mediane sono uguali (il caso di uguaglianza nella disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica si ha soltanto se tutti i termini sono uguali), il che è equivalente al fatto che il triangolo sia equilatero.

La disuguaglianza a sinistra invece non è mai un'uguaglianza.

Esercizio 3. Sia $ABCDE$ un pentagono convesso e siano M, P, N, Q i punti medi dei lati $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$, rispettivamente. Se K e L sono i punti medi dei segmenti \overline{MN} e \overline{PQ} , rispettivamente e il lato \overline{AE} ha lunghezza 1, si trovi la lunghezza del segmento \overline{KL} .

Soluzione. Si tracci il segmento \overline{AD} e si consideri il suo punto medio che chiameremo S . Il quadrilatero $MPNS$ ha come vertici i punti medi di $ABCD$, quindi le diagonali di $MPNS$ si bisecano e il loro punto di intersezione è K in quanto punto medio della diagonale \overline{MN} . Se si considera il triangolo PSQ si può applicare il teorema di Talete in quanto $\overline{PS} = 2\overline{PK}$ e $\overline{PQ} = 2\overline{PL}$ e quindi $\overline{QS} = 2\overline{KL}$. Non ci resta quindi che trovare \overline{QS} . Ma poiché $\overline{AD} = 2\overline{AS}$ e $\overline{DE} = 2\overline{QD}$, riapplicando il teorema di Talete si ottiene $\overline{AE} = 2\overline{QS}$, quindi $\overline{AE} = 4\overline{KL}$. Segue che allora $4\overline{KL} = 1$ cioè $\overline{KL} = 1/4$.



Esercizio 4. Sia $p = abc$ un numero primo di tre cifre, a , b e c . Si dimostri che il polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

non può avere due radici intere.

Soluzione. Se n e m sono le due radici intere di $p(x)$, si ha

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - n)(x - m).$$

Ponendo $x = 10$, per l'ipotesi si ottiene $p = a(10 - n)(10 - m)$, quindi dei tre numeri interi a , $(10 - n)$ e $(10 - m)$ due devono essere uguali a 1 o -1 e uno deve essere uguale a p , per il fatto che p è primo. Dato che $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ non può essere uguale a p , si ha $a = 1$, inoltre il prodotto nm delle due radici è uguale a c che è positivo (se fosse zero p sarebbe divisibile per 10) e la somma $n + m$ è uguale a $-b$ che è negativo o zero. Da questo segue che sia n che m sono negativi, il che porta ad una contraddizione in quanto allora entrambi i due numeri $(10 - n)$ e $(10 - m)$ sono maggiori di 10, quindi non possono essere 1 o -1 .

Esercizio 5. Si trovino tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}.$$

Soluzione. Dimostriamo prima che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(n) \geq n$. Supponiamo esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(n_0) < n_0$ e dimostriamo allora per induzione che $f(f(f(\dots(n_0)\dots))) < n_0$. Supponiamo che componendo fino a k volte f su n_0 si rimane sempre “sotto” n_0 (il caso $k = 1$ è l'ipotesi), allora se componiamo una $(k + 1)$ -esima volta si ha

$$f(f(f(f(\dots(n_0)\dots)))) = f(f[f(f(f(\dots(n_0)\dots))]) \leq \frac{f([f(f(f(\dots(n_0)\dots))]) + [f(f(f(\dots(n_0)\dots))])}{2}$$

dove a sinistra abbiamo composto f per $(k + 1)$ volte e a destra per k volte e $(k - 1)$ volte al numeratore della frazione. Usando l'ipotesi induttiva, entrambe le due composizioni al numeratore sono minori di n_0 , di conseguenza, anche il membro sinistro, da cui la tesi per il principio di induzione. Essendo la funzione iniettiva e non negativa, se esistesse tale n_0 allora tutte le composizioni di f su n_0 avrebbero valori compresi tra 0 e n_0 e sarebbero tutti distinti, ma tali valori sono infiniti, da cui l'assurdo e la conclusione che tale n_0 non può esistere.

Se ora dunque deve essere $f(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$f(n) \leq f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2},$$

da cui $\frac{f(n)}{2} \leq \frac{n}{2}$, cioè $f(n) \leq n$ e quindi $f(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dato che anche $f(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, concludiamo che l'unica funzione che soddisfa le ipotesi è l'identità $f(n) = n$.

Esercizio 6. Si provi che non esistono tre numeri primi p , q , r tali che i tre numeri $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\sqrt[3]{r}$ siano in progressione aritmetica.

Soluzione. Si vede facilmente che se p , q , r soddisfano le ipotesi deve essere

$$\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{r} = 2\sqrt[3]{q}.$$

Facendo il cubo di entrambi i membri si ottiene

$$p + r + 3\sqrt[3]{p^2r} + 3\sqrt[3]{r^2p} = 8q$$

quindi

$$3\sqrt[3]{pr}(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{r}) = 8q - p - r,$$

che è intero.

Dato che il membro sinistro di questa equazione è uguale a $6\sqrt[3]{pr}\sqrt[3]{q} = 6\sqrt[3]{pqr}$, si concluderebbe che $6\sqrt[3]{pqr}$ è intero, diciamo uguale a $n \in \mathbb{N}$. Prendendo il cubo di entrambi i membri si avrebbe allora

$$216pqr = n^3,$$

che, per il fatto che p, q, r sono primi, implica facilmente che dovrebbero coincidere, da cui l'assurdo.