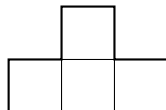


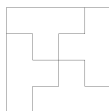
SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica
A.A. 2015–2016
(Corsi di Laurea *diversi* da Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

Soluzioni degli Esercizi

Esercizio 1. Quali quadrati di lato intero si possono costruire con delle tessere della forma seguente, tenendo presente che ogni quadratino ha lato 1?



Soluzione. Si può costruire nel seguente modo il quadrato di lato 4 e con esso facilmente anche tutti i quadrati con lato divisibile per 4.



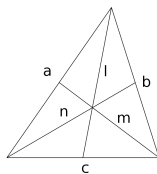
Dato che le tessere hanno area 4, il lato di ogni quadrato costruibile non può essere dispari, quindi resta da stabilire se i quadrati di lato pari e non divisibile per 4 siano costruibili o no. Si noti che un tale quadrato deve essere costruito con un numero dispari di tessere.

Supponiamo di essere riusciti a costruirlo e immaginiamo che sia colorato a scacchiera, si vede allora che ogni tessera copre o 3 caselle bianche e una nera o 3 nere e una bianca, chiamiamo tessere *di tipo A* le prime e *di tipo B* le seconde. Supponiamo ci siano n tessere di tipo *A* e m tessere di tipo *B*, con $n + m$ dispari, per quanto detto sopra. Allora si avranno $3n + m$ caselle bianche e $3m + n$ caselle nere e questi due numeri devono essere uguali, segue facilmente che $n = m$, ma allora $n + m$ non può essere dispari, da cui l'assurdo e l'impossibilità di costruire tali quadrati di lato non divisibile per 4.

Esercizio 2. Dato un triangolo di lati di lunghezza a, b, c , siano m, n, l le lunghezze delle rispettive mediane. Si provi che

$$\frac{3}{4}(a + b + c) \leq m + n + l.$$

Soluzione. Si consideri il triangolo formato da un lato e dai tratti delle due mediane degli altri due lati dal vertice al baricentro. Per la disuguaglianza triangolare la somma di questi due tratti (ognuno lungo $2/3$ dell'intera mediana) è maggiore del lato. Ripetendo questo argomento per i tre lati e sommando le tre disuguaglianze ottenute si ottiene la disuguaglianza da dimostrare.



Esercizio 3. Sia $p = abc$ un numero primo di tre cifre, a , b e c . Si dimostri che il polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

non può avere due radici intere.

Soluzione. Se n e m sono le due radici intere di $p(x)$, si ha

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - n)(x - m).$$

Ponendo $x = 10$, per l'ipotesi si ottiene $p = a(10 - n)(10 - m)$, quindi dei tre numeri interi a , $(10 - n)$ e $(10 - m)$ due devono essere uguali a 1 o -1 e uno deve essere uguale a p , per il fatto che p è primo. Dato che $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ non può essere uguale a p , si ha $a = 1$, inoltre il prodotto nm delle due radici è uguale a c che è positivo (se fosse zero p sarebbe divisibile per 10) e la somma $n + m$ è uguale a $-b$ che è negativo o zero. Da questo segue che sia n che m sono negativi, il che porta ad una contraddizione in quanto allora entrambi i due numeri $(10 - n)$ e $(10 - m)$ sono maggiori di 10, quindi non possono essere 1 o -1 .

Esercizio 4. Dato un qualunque numero naturale n si mostri che esistono n numeri interi consecutivi nessuno dei quali è primo.

Soluzione. Dato $n \in \mathbb{N}$ si considerino i numeri $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + n + 1$. Evidentemente nessuno di loro è primo in quanto sono divisi rispettivamente da $2, 3, \dots, n + 1$, quindi abbiamo n numeri consecutivi nessuno dei quali è primo.

Esercizi e soluzioni a cura di Carlo Mantegazza con la collaborazione di Claudio Genovese, Alessio Borzi, Federico Savasta, Sebastiano Randino, Filippo Antonazzo, Giampaolo Pitruzzello, Gabriele Di Bona.