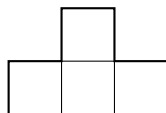


SELEZIONE PER L'AMMISSIONE AL I ANNO DEI  
CORSI ORDINARI DELLA SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA  
Area delle Scienze Sperimentali – Prova di Matematica e Logica  
A.A. 2015–2016  
(Corsi di Laurea di Matematica, Fisica, Informatica e Ingegneria)

15 Settembre 2015

**Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.**

**Esercizio 1.** Quali quadrati di lato intero si possono costruire con delle tessere della forma seguente, tenendo presente che ogni quadratino ha lato 1?



**Esercizio 2.** Dato un triangolo di lati di lunghezza  $a, b, c$ , siano  $m, n, l$  le lunghezze delle rispettive mediane. Si provi che

$$\frac{3}{4}(a + b + c) \leq m + n + l \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $ABCDE$  un pentagono convesso e siano  $M, P, N, Q$  i punti medi dei lati  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ , rispettivamente. Se  $K$  e  $L$  sono i punti medi dei segmenti  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$ , rispettivamente e il lato  $\overline{AE}$  ha lunghezza 1, si trovi la lunghezza del segmento  $\overline{KL}$ .

**Esercizio 4.** Sia  $p = abc$  un numero primo di tre cifre,  $a, b$  e  $c$ . Si dimostri che il polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

non può avere due radici intere.

**Esercizio 5.** Si trovino tutte le funzioni iniettive  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tali che

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}.$$

**Esercizio 6.** Si provi che non esistono tre numeri primi  $p, q, r$  tali che i tre numeri  $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{r}$  siano in progressione aritmetica.