

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione- Anno 2006
Prova Scritta di Matematica e Logica- Compito n.1
Soluzione dei quesiti

1)a) Moltiplicando il polinomio $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ per $X - 1$ si ottiene $X^5 - 1$ la cui unica radice reale è $X = 1$ che non è radice di $f(X)$.

b) Da a) segue che $f(X)$ si scompone su \mathbf{R} nel prodotto di due polinomi di secondo grado entrambi irriducibili. Per trovare tale decomposizione si può procedere come segue: si divide $f(X)$ per X^2 e si pone $T = X + 1/X$; si ottiene $f(X)/X^2 = T^2 + T - 1 = (T + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(T + \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ da cui $f(X) = (X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1)(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1)$.

c) Segue da b). Infatti $f(X)$ non ha radici razionali e quindi se si decomponesse sui razionali nel prodotto di due polinomi di secondo grado seguirebbe, per l'unicità della decomposizione, che i due polinomi trovati in b) sarebbero a coefficienti razionali.

2) È più facile calcolare la probabilità contraria, cioè che non esca nessun sei. Segue allora $P_1 = 1 - (5/6)^6 = 31031/46656 \simeq 0,665$.

Quanto a P_n si vede subito che è

$$P_n = \sum_{i=n}^{6n} \binom{6n}{i} (1/6)^i (5/6)^{6n-i}$$

ciò perché il numero i di facce contenenti il sei può andare da un minimo di n ad un massimo di $6n$.

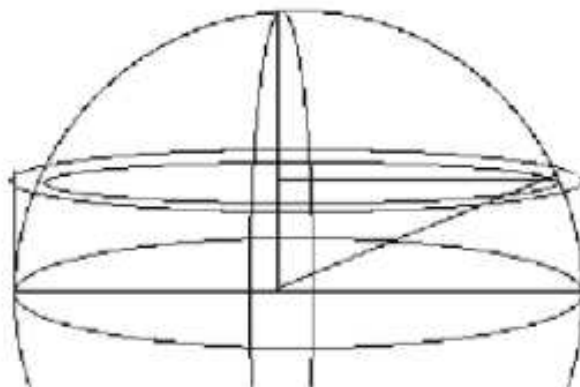
3) Una soluzione è $(1/2, 1/2)$. Consideriamo una retta del fascio per questo punto $y - 1/2 = m(x - 1/2)$ e intersechiamo con la nostra ellisse $x^2 + 7y^2 = 2$. Oltre al punto $(1/2, 1/2)$ otteniamo il punto di coordinate $x = (7m^2 - 14m - 1)/2(1 + 7m^2)$, $y = (-7m^2 - 2m + 1)/2(1 + 7m^2)$. Le formule precedenti danno, al variare del parametro m nell'insieme dei numeri razionali, tutte le soluzioni razionali della nostra equazione, escluso il punto $(1/2, -1/2)$ che non proviene da nessun valore del parametro m e si ottiene considerando la retta del fascio in posizione verticale.

4) Per calcolare tale volume si possono usare due metodi.

a) Considerando il nostro solido come solido di rotazione attorno all'asse \vec{x} della porzione del cerchio di centro l'origine e raggio r delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = r/2$. Tale volume è dato dall'integrale

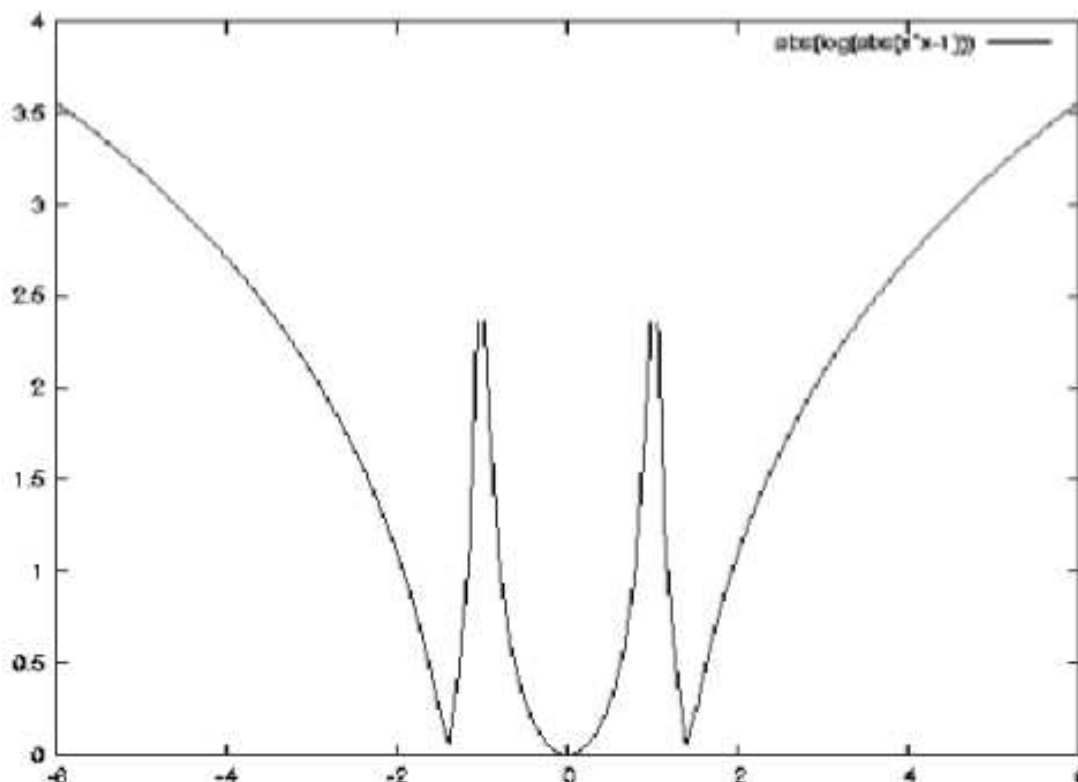
$$\int_0^{r/2} \pi y^2 dx = \int_0^{r/2} \pi (r^2 - x^2) dx = \pi [r^2 x - x^3/3]_0^{r/2} = 11\pi r^3/24$$

b) Un modo più elementare è il seguente: si consideri il cilindro circoscritto al nostro solido, avente come base il cerchio di raggio r , ed altezza $r/2$ e si consideri il solido complementare S (vedi figura).



Per proprietà note dal liceo (Principio di Cavalieri e scodella di Galileo) il solido S è equivalente ad un cono di altezza $r/2$ e base equivalente alla corona circolare di raggi r e $\sqrt{3}r/2$. Quest'ultima ha area $\pi r^2/4$, e il cono ha quindi volume $\pi r^3/24$.

5) Il diagramma è il seguente:



le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali e i due punti, oltre l' origine, in cui incontra l' asse \vec{x} sono i punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

L' area cercata è data dall' integrale (improprio): $-\int_0^1 \log(1-x^2)dx$. Calcolando l' integrale indefinito per parti si trova una primitiva che è

$$-x \log(1-x^2) + 2x + \log(1-x) - \log(1+x) = (1-x) \log(1-x) + 2x - (1+x) \log(1+x)$$

Quando x tende a 1 dalla sinistra il termine $(1-x) \log(1-x)$ tende a zero e quindi in definitiva la nostra area è $2(1 - \log 2)$.

6) Il punto generico C di γ ha coordinate $(1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}, \lambda)$. La retta BT ha equazione $\lambda x + 2y = 2\lambda$ e la retta OC $\lambda(x-1) = \pm\sqrt{1-\lambda^2}y$; Eliminando λ fra le due equazioni si ottiene l' ellisse $3x^2 - 4x + 4y^2 = 0$. Si noti che, come caso degenero quando C coincide con B , il luogo contiene anche la retta $y = 0$.

I vertici dell' ellisse sono: $(0, 0)$, $(4/3, 0)$ sull' asse maggiore e $(2/3, \pm\sqrt{3}/3)$ sull' asse minore.

7) La seconda formula è chiaramente valida, la prima no. Per avere un modello in cui la prima non è vera si può prendere come dominio l' insieme \mathbf{N} dei numeri naturali e interpretare f come la funzione "successivo" e R come la relazione "uguale".

8) Il modo più semplice è considerare i vari casi secondo la parità di x e y . x, y non possono essere entrambi pari nè entrambi dispari altrimenti la quantità $x^2 - 7y^2$ risulterebbe pari. Facciamo ora il caso x pari e y dispari: il numero $x^2 + 1$ è del tipo $q + 4\lambda$ cioè diviso per 4 dà resto 1 mentre $7y^2$ diviso per 4 dà resto 3. Resta infine il caso x dispari e y pari: in questo caso $7y^2$ è multiplo di 4 mentre $x^2 + 1$ diviso per 4 dà resto 2.

9) Le soluzioni della disequazione sono i valori dell'intervallo $0 \leq x \leq 4$.