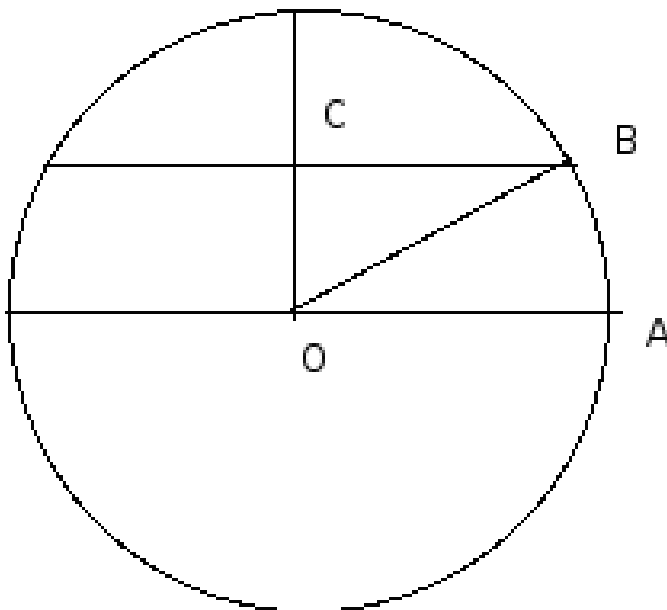


Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione- Anno 2006
Prova Scritta di Matematica e Logica- Compito n.2
Soluzione dei quesiti

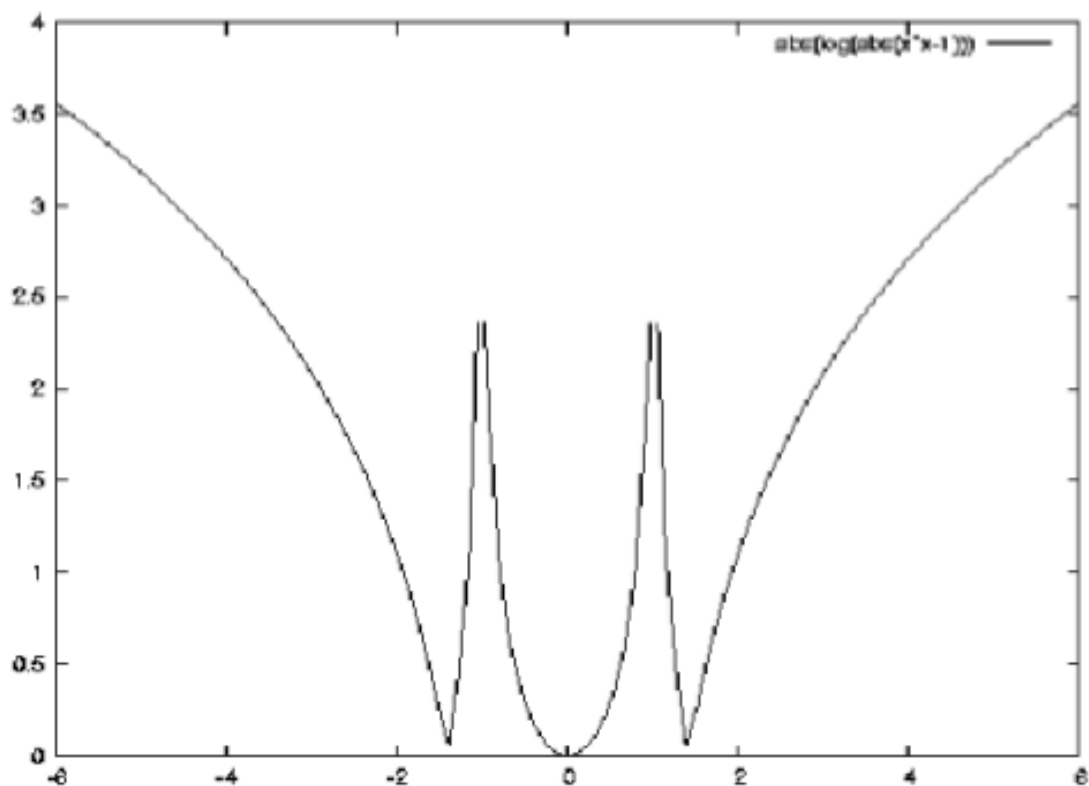
- 1)a) Per ogni numero reale x si ha $x^4 \geq 0$ e quindi $x^4 + 2 > 0$.
- b) Da a) segue che $f(X)$ si scompone su \mathbf{R} nel prodotto di due polinomi di secondo grado entrambi irriducibili. Per trovare tale decomposizione si può procedere come segue:
$$X^4 + 2 = (X^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}X^2 = (X^2 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{8}X)(X^2 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}X)$$
- c) Segue da b). Infatti $f(X)$ non ha radici razionali e quindi se si decomponesse sui razionali nel prodotto di due polinomi di secondo grado seguirebbe, per l'unicità della decomposizione, che i due polinomi trovati in b) sarebbero a coefficienti razionali.
- 2) Le uniche soluzioni intere sono chiaramente $(\pm 1, 0)$. Per trovare tutte le soluzioni razionali si consideri nel piano il fascio di rette per il punto $(1, 0)$: $y = m(x - 1)$ e intersechiamo con la nostra ellisse $x^2 + 3y^2 = 1$. Oltre al punto $(1, 0)$ otteniamo il punto di coordinate $x = (-1 + 3m^2)/(1 + 3m^2)$, $y = -2m/(1 + 3m^2)$. Le formule precedenti danno, al variare del parametro m nell'insieme dei numeri razionali, tutte le soluzioni razionali della nostra equazione,
- 3) Il modo più semplice è considerare i vari casi secondo la parità di x e y . x, y non possono essere entrambi pari nè entrambi dispari altrimenti la quantità $x^2 - 7y^2$ risulterebbe pari. Facciamo ora il caso x pari e y dispari: il numero $x^2 + 1$ è del tipo $q + 4\lambda$ cioè diviso per 4 dà resto 1 mentre $7y^2$ diviso per 4 dà resto 3. Resta infine il caso x dispari e y pari: in questo caso $7y^2$ è multiplo di 4 mentre $x^2 + 1$ diviso per 4 dà resto 2.
- 4) Le soluzioni della disequazione sono i valori dell'intervallo $0 \leq x \leq 4$.
- 5) Rispetto a tutte le possibili mani di poker che sono $\binom{52}{5} = 2598960$, quelle che danno un full sono: $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$ in quanto 13 sono i possibili tris (tris di assi, di due, di tre, etc.) e ciascuno di essi può figurare in quattro modi diversi, mentre 12 sono le possibili coppie e ciascuna può figurare in sei modi. Le mani che danno un colore sono chiaramente $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$ e in queste sono incluse le 40 possibili scale reali. Ne segue che il colore è più facile del full.
- 6) Dalla figura:



il segmento CB è lungo $\sqrt{3}r/2$ e quindi l'area del triangolo OBC è $\sqrt{3}r^2/8$. Lo spicchio

BOA ha l'angolo al centro di 30 gradi e quindi è la dodicesima parte del cerchio; la sua area è quindi $\pi r^2/12$. In definitiva l'area richiesta è $(\sqrt{3}/4 + \pi/6)r^2$.

7) Il diagramma della funzione è:



le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali e i due punti, oltre l'origine, in cui incontra l'asse \vec{x} sono i punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

8) È più facile calcolare la probabilità contraria, cioè che non esca nessun sei. Segue allora $P_1 = 1 - (5/6)^6 = 31031/46656 \simeq 0,665$.

9) Conviene cambiare. Infatti la probabilità che il premio si trovi nella scatola scelta è $1/3$ e quindi la probabilità che si trovi nell'altra scatola è la probabilità contraria cioè $2/3$.