

Scuola Superiore di Catania
Concorso di Ammissione- Anno 2006
Prova Scritta di Matematica e Logica- Compito n.1

- 1) Sia dato il polinomio $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
 - a) Provare che non ha radici reali.
 - b) Decomporre il polinomio in fattori irriducibili nel campo dei numeri reali.
 - c) Provare che è irriducibile nel campo dei numeri razionali.
- 2) Calcolare la probabilità P_1 di ottenere almeno un sei nel lancio di 6 dadi. Provare che è maggiore di $1/2$.
Generalizzare tale risultato scrivendo una formula per P_n , dove P_n è la probabilità di ottenere almeno n sei nel lancio di $6n$ dadi.
- 3) Calcolare tutte le soluzioni razionali dell'equazione $x^2 + 7y^2 = 2$.
- 4) Calcolare il volume della porzione di sfera di raggio r delimitata da due piani paralleli uno dei quali passante per il centro e distanti $r/2$ fra loro.
- 5) Disegnare il diagramma della funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = |\log |x^2 - 1||$$

e calcolare l'area della regione piana delimitata dall'asse \vec{x} , dalla retta di equazione $x = 1$ e dalla curva $f(x)$, $0 \leq x < 1$.

- 6) Nel piano cartesiano è data la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e siano: $O \equiv (1, 0)$ il suo centro, $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 0)$ i punti in cui γ incontra l'asse \vec{x} . Sia ora C un punto generico di γ e sia T il punto in cui la parallela per C all'asse \vec{x} incontra l'asse \vec{y} ; si determini il luogo descritto dal punto P comune alle rette OC e BT al variare di C su γ .

Si provi che tale luogo contiene una ellisse e si determinino i suoi vertici.

- 7) Sia f un simbolo di funzione unaria ed R un simbolo di relazione binaria. Si considerino le seguenti formule del primo ordine:

$$(\forall x)((\exists y)R(x, y) \rightarrow R(x, f(x)))$$

$$(\forall x)((\exists y)R(x, y) \leftarrow R(x, f(x))).$$

Per ciascuna delle due formule dire se è una formula valida (cioè vera in ogni modello). In caso di risposta negativa esibire un modello in cui la formula è falsa.

- 8) Provare che l'equazione $x^2 - 7y^2 = -1$ non ha soluzioni in numeri interi relativi.
- 9) Risolvere la disequazione $|1 - |2 - x|| \leq 1$.