

**Scuola Superiore di Catania**  
**Concorso di ammissione ai corsi ordinari di primo livello**  
**a.a.2004-2005**

*Prova di Matematica e logica per i corsi di laurea in Scienze biologiche,  
Scienze geologiche, Chimica, Chimica industriale, Scienze ambientali,  
Scienze ecologiche ed educazione ambientale, Tecnologie per la  
conservazione ed il restauro dei Beni Culturali, tutti i corsi di laurea delle  
Facoltà di Agraria, Farmacia, Medicina e Chirurgia*

*Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi*

1) Stabilire, per ogni coppia  $a, b$  di numeri reali, quante soluzioni reali ammette l'equazione  $a - bx^8 = 0$ .

Se  $a = b = 0$ , l'equazione è indeterminata; se  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , l'equazione è impossibile; se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , si ha l'unica radice  $x = 0$ .

Supponiamo quindi  $a, b$  diversi da 0; l'equazione equivale ad  $x = b/a$ . Se i numeri  $a, b$  sono concordi, allora abbiamo due distinte radici reali, una opposta dell'altra; se invece i due numeri  $a, b$  sono discordi (uno è positivo e l'altro è negativo), allora non ci sono radici reali (equazione impossibile).

2) Calcolare

$$\frac{1}{1 + 2004^{2004}} + \frac{1}{1 + 2004^{-2004}}$$

Posto  $2004^{2004} = a$ , si tratta di calcolare  $1/(1+a) + 1/(1+1/a)$ . Con semplici passaggi si dimostra che la somma è 1.

3) Sia  $AB$  un diametro di un cerchio  $H$  e sia  $CD$  una corda perpendicolare ad  $AB$  in un suo punto  $P$ . Sia  $R$  la regione di piano che si ottiene togliendo da  $H$  i due cerchi aventi rispettivamente per diametro  $AP$  e  $PB$ . Calcolare la lunghezza del contorno e l'area di  $R$ , supponendo di conoscere le misure di  $AB$  e di  $CD$ . E' necessaria la conoscenza delle misure di entrambi i segmenti per rispondere alle domande?

La lunghezza del contorno di R è uguale a  $\pi \cdot AB + \pi \cdot AP + \pi \cdot PB = 2\pi \cdot AB$ ; di conseguenza, per determinare questa lunghezza non è necessario conoscere CD.

L'area di R è uguale a

$$\begin{aligned}(\pi/4) \cdot [AB^2 - AP^2 - PB^2] &= (\pi/4) \cdot [(AP+PB)^2 - AP^2 - PB^2] = \\ &= (\pi/4) \cdot (2AP \cdot PB) = \pi \cdot AP \cdot PB / 2 = \pi \cdot CD^2 / 8\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il II teorema di Euclide). Di conseguenza, per determinare l'area non è necessario conoscere AB.

4) Due persone sono nate in anni diversi, ma festeggiano il compleanno lo stesso giorno.

Se la somma delle loro età attuali è dispari, negli anni futuri la somma delle loro età sarà pari o dispari? E il prodotto?

Se il prodotto delle loro età attuali è dispari, negli anni futuri la somma delle loro età sarà pari o dispari?

Se la somma delle due età attuali è dispari, allora si tratta di un numero pari e uno dispari. Anche negli anni futuri, una delle due età sarà espressa da un numero pari e l'altra da un numero dispari. La somma sarà quindi sempre dispari e il prodotto sempre pari.

Se il prodotto delle due età attuali è dispari, allora si tratta di due numeri dispari. Negli anni futuri, le due età saranno entrambe pari oppure entrambe dispari; in entrambi i casi, la somma sarà pari.

5) Sia  $\alpha$  l'ampiezza di un angolo al centro AOB in una circonferenza  $\Gamma$  (dove A e B sono punti di  $\Gamma$ ). Supponendo che  $\alpha$  sia minore di un angolo piatto, si traccino le tangenti a  $\Gamma$  in A e in B, e sia O' il loro punto d'incontro.

Si determini l'ampiezza degli angoli del triangolo AO'B. Si dimostri che il quadrilatero AOBO' è inscrittibile e circoscrittibile. Supponendo  $\alpha = 60^\circ$  ed OA = 1, si determinino perimetro ed area del quadrilatero AOBO'.

Il triangolo AO'B è isoscele e, quindi, l'ampiezza degli angoli in A e in B è  $(180^\circ - \alpha)/2$ . Il quadrilatero AOBO' è circoscrittibile perché OA + O'B = OB + O'A; ed è inscrittibile perché gli angoli opposti in A e in B sono retti (e quindi la loro somma è  $180^\circ$ ).

Per rispondere all'ultima domanda, basta osservare che, se  $\alpha = 60^\circ$ , allora OO'A è la metà di un triangolo equilatero.

6) Una strada in salita va dal livello del mare a 400 metri di altezza. Nel primo tratto, da 0 a 200 metri di altezza, la pendenza media è il 2%, mentre nel secondo tratto, da 200 a 400 metri di altezza, la pendenza media è il 4%. Qual è la pendenza media dell'intero tratto?

La risposta 3%, ottenuta come media aritmetica delle due pendenze, è sbagliata.

In effetti, la lunghezza del primo tratto è di 10 km (il 2% di 10 km è uguale a 200 m), mentre la lunghezza del secondo tratto è di 5 km (il 4% di 5 km è uguale a 200 m). Quindi, la strada è lunga 15 km, e la pendenza media è  $400/15000 = 0,0266\dots$ , cioè circa il 2,66%.

7) Dovendo compiere un viaggio in macchina, Tizio ha programmato di tenere la velocità di 90 km/h in tutto il percorso. Tuttavia, a causa del traffico, nella prima ora riesce a tenere solo la media di 75 km/h. Di quanti minuti è in ritardo Tizio rispetto ai suoi programmi? Per quanti chilometri deve tenere la velocità di 120 km/h per recuperare il ritardo?

Nella prima ora, Tizio ha percorso 75 km; se invece fosse andato a 90 km/h, come previsto, avrebbe impiegato solo 50 minuti: pertanto, è in ritardo di 10 minuti.

Per rispondere alla seconda domanda, tenendo presente che  $s/v = t$ , occorre trovare il valore di  $x$  che soddisfa l'equazione

$$1 + x/120 = (75+x)/90$$

che si ottiene uguagliando i tempi, espressi in ore, del viaggio reale e del viaggio programmato.

Si ricava  $x = 60$  km. In effetti, 60 km si percorrono in 40 minuti a 90 km/h, mentre bastano 30 minuti a 120 km/h: viaggiando a quest'ultima velocità si recuperano così i 10 minuti di ritardo.

8) Sono dati un punto  $P$ , due rette  $r$  ed  $s$  (non parallele fra loro), due piani  $\beta$  e  $\gamma$  (non paralleli fra loro). In quali dei seguenti casi le condizioni scritte individuano uno e un solo piano  $\alpha$ ?

$\alpha$  passa per  $P$  ed è parallelo a  $\beta$

$\alpha$  passa per  $P$  ed è parallelo ad  $r$  e ad  $s$

$\alpha$  passa per  $P$  ed è perpendicolare ad  $r$  e ad  $s$

$\alpha$  passa per  $P$  ed è perpendicolare a  $\beta$  e a  $\gamma$

Le condizioni scritte individuano uno e un solo piano  $\alpha$  in tutti i casi tranne il terzo (in cui non esiste alcun piano).

Il primo caso è il più semplice e non richiede commenti. Per quanto riguarda il secondo caso, si tracci la retta  $a$  parallela ad  $r$  per un punto di  $s$  scelto a piacere:  $\alpha$  è il piano per  $P$  parallelo al piano individuato dalle rette incidenti  $a$  ed  $s$ .

Nell'ultimo caso, si consideri la retta  $h$  intersezione dei piani  $\beta$  e  $\gamma$  (che non sono paralleli):  $\alpha$  è il piano per  $P$  perpendicolare ad  $h$ .

9) Si sa che l'equazione  $x^2 + px + q = 0$  ammette come soluzioni due numeri  $a$  e  $b$ . Quali sono le soluzioni dell'equazione  $x^2 + 2px + 4q = 0$  ? Quali sono le soluzioni dell'equazione  $x^2 - px + q = 0$  ? Quali sono le soluzioni dell'equazione  $qx^2 + px + 1 = 0$  ?

Una risoluzione completa di questo problema è stata pubblicata e commentata sulla rivista Archimede, n. 2 del 2005, pag. 91.

Il sito Internet della rivista è [www.lemonnier.it/archimede/](http://www.lemonnier.it/archimede/)

Qui ci limitiamo a riportare le risposte:  $2a$  e  $2b$ ;  $-a$  e  $-b$ ;  $1/a$  e  $1/b$ .