

**Scuola Superiore di Catania**  
**Concorso di ammissione ai corsi ordinari di primo livello**  
**a.a.2004-2005**

**Prova di Matematica e logica per i corsi di laurea in Matematica,  
Matematica per le applicazioni, Fisica, Informatica, Informatica  
applicata, tutti i corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria**

*Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi*

1) Trovare tutte le coppie di numeri reali  $x, y$  che soddisfano l'equazione  
 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$ .

2) Un quadrilatero ABCD, inscritto in una circonferenza  $\Gamma$ , ha le diagonali perpendicolari. Sapendo che gli angoli in A e in B sono rispettivamente di  $60^\circ$  e di  $100^\circ$ , determinare l'ampiezza

i) degli altri angoli del quadrilatero,

ii) degli angoli ABD, DBC e degli altri angoli che le diagonali AC e BD formano con i lati.

Si traccino poi le 4 rette tangenti a  $\Gamma$  in A, B, C, D e si determinino gli angoli del quadrilatero circoscritto a  $\Gamma$  che così si ottiene. E' vero che quest'ultimo quadrilatero è a sua volta inscritto in una circonferenza?

3) Nel piano cartesiano si tracci la retta  $r$  di equazione  $x + 2y + 4 = 0$ . Si traccino poi: la retta  $a$  simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ , la retta  $b$  simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $y$ , la retta  $c$  simmetrica di  $r$  rispetto all'origine. Quali sono le equazioni delle rette  $a, b, c$ ?

Le rette  $a, b, c$  si corrispondono, a due a due, in opportune simmetrie?

4) Si consideri un'equazione del tipo  $x^2 + px + q = 0$ , dove  $p$  e  $q$  sono numeri interi relativi. E' vero che per ogni valore di  $p$  esistono infiniti valori di  $q$  tali che l'equazione  $x^2 + px + q = 0$ , ammette come soluzioni due numeri interi relativi? E' vero che per ogni valore di  $q$  esistono infiniti valori di  $p$  tali che l'equazione  $x^2 + px + q = 0$ , ammette come soluzioni due numeri interi relativi?

5) Tre compagni di classe confrontano i voti che hanno riportato nei 4 scritti di matematica che hanno svolto durante l'anno.

Andrea afferma di essere il più bravo dei tre, perché la media aritmetica dei suoi voti è migliore di quella dei compagni.

A sua volta, Bruno dice che il più bravo è lui: è l'unico fra i tre che ha riportato un "10" ed è l'unico che non ha mai avuto insufficienze.

Infine, Carlo ribatte di essere il migliore: in ben 3 dei 4 scritti ha avuto un voto migliore degli altri.

Si mostri, attraverso un opportuno esempio, che la situazione descritta, per quanto improbabile, può effettivamente verificarsi. Si assume che i tre studenti abbiano svolto tutti gli scritti e che i voti siano numeri interi compresi fra 1 e 10.

6) Nel classico gioco dell'oca c'è una pista suddivisa in caselle, contrassegnate dai numeri naturali positivi (in un certo senso lo 0 corrisponde al punto di partenza). Ogni giocatore, a turno, lancia un dado e sposta in avanti il suo contrassegno del numero di caselle indicate dal dado. (Non prendiamo in considerazione caselle con messaggio del tipo "vai al n. 12" o "torna indietro di tre passi".)

Per semplicità, supponiamo di lanciare una moneta al posto di un dado: se viene testa il giocatore avanza di 1 casella, se viene croce il giocatore avanza di 2 caselle.

Qual è la probabilità che un giocatore passi per la casella n. 1? E per la casella n. 2? E per la casella n. 3?

Dimostrare che, per ogni  $x > 2$ , la probabilità di capitare nella casella  $x$  è la media aritmetica delle probabilità di capitare in ciascuna delle due caselle precedenti,  $x-1$  ed  $x-2$ .

Qual è la casella in cui è più probabile passare? E quella in cui è meno probabile? (Si supponga che la pista contenga, in tutto, 20 caselle).

7) In una classe ci sono 10 tifosi fra Juventus e Milan. Si sa che delle seguenti frasi, una e una sola è vera. Di quale frase si tratta?

- A. Ci sono almeno 6 juventini
- B. I milanisti sono non più di 5
- C. Gli juventini sono meno di 3
- D. Gli juventini sono almeno tanti quanti i milanisti
- E. Ci sono almeno 5 milanisti

(Suggerimento: se due frasi sono equivalenti, allora non possono essere vere ...)

8) Una piramide a base quadrata ha per facce laterali quattro triangoli equilateri. Se ogni spigolo della piramide ha lunghezza unitaria, qual è la lunghezza del raggio della sfera circoscritta alla piramide?

9) In numerazione binaria, il numero «quattro» si scrive 100. Se aggiungiamo la cifra 1 all'inizio, otteniamo 1100 che, sempre in numerazione binaria, corrisponde al numero «dodici», cioè al triplo di quattro.

Trovare altri numeri naturali  $n$  che godono della stessa proprietà, cioè tali che, aggiungendo la cifra 1 all'inizio della scrittura in notazione binaria di  $n$ , si ottiene il triplo del numero  $n$ .

Di quali numeri si tratta?

10) Dimostrare che se tre numeri reali (diversi fra loro) formano una progressione aritmetica, allora quei tre numeri, nello stesso ordine, non possono formare una progressione geometrica.

Trovare poi tre numeri reali relativi (diversi fra loro e da 0) in progressione aritmetica che, in un ordine diverso, formino una progressione geometrica.

(Si ricorda che tre numeri  $a, b, c$  formano una progressione aritmetica se  $a-b = b-c$ , e che tre numeri  $a, b, c$  formano una progressione geometrica se  $a/b = b/c$ ).