

Scuola Superiore di Catania
Concorso di ammissione ai corsi ordinari di primo livello
a.a.2004-2005

Prova di Matematica e logica per i corsi di laurea in Matematica, Matematica per le applicazioni, Fisica, Informatica, Informatica applicata, tutti i corsi di laurea della Facoltà di Ingegneria

Il candidato risolva quanti più può dei seguenti esercizi

1) Trovare tutte le coppie di numeri reali x, y che soddisfano l'equazione
 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$.

L'esercizio è facile se si osserva che

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 1 = (x + y)^2 + (y - 1)^2$$

2) Un quadrilatero $ABCD$, inscritto in una circonferenza Γ , ha le diagonali perpendicolari. Sapendo che gli angoli in A e in B sono rispettivamente di 60° e di 100° , determinare l'ampiezza

- i) degli altri angoli del quadrilatero,
- ii) degli angoli ABD , DBC e degli altri angoli che le diagonali AC e BD formano con i lati.

Si traccino poi le 4 rette tangenti a Γ in A, B, C, D e si determinino gli angoli del quadrilatero circoscritto a Γ che così si ottiene. E' vero che quest'ultimo quadrilatero è a sua volta inscritto in una circonferenza?

- i) Ricordando le proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza, si trovano le ampiezze 120° e 80° .
- ii) Osservando che gli angoli CAD e CBD sono uguali, indicando con α la loro ampiezza, si ha $60^\circ - \alpha + 100^\circ - \alpha = 90^\circ$, da cui $\alpha = 35^\circ$.

Le altre ampiezze si deducono poi facilmente: $25^\circ, 55^\circ, 65^\circ$.

Infine, detto P il punto d'incontro delle rette tangenti in A e in B , si osservi che il triangolo ABP è isoscele e che l'ampiezza degli angoli uguali è 55° . L'angolo in P del quadrilatero è quindi di 70° . Gli altri angoli del quadrilatero sono, nell'ordine, di $130^\circ, 110^\circ, 50^\circ$. Siccome $70^\circ + 110^\circ = 130^\circ + 50^\circ$, il quadrilatero è inscritto.

3) Nel piano cartesiano si tracci la retta r di equazione $x + 2y + 4 = 0$. Si traccino poi: la retta a simmetrica di r rispetto all'asse x , la retta b simmetrica di r rispetto all'asse y , la retta c simmetrica di r rispetto all'origine. Quali sono le equazioni delle rette a , b , c ?

Le rette a , b , c si corrispondono, a due a due, in opportune simmetrie?

Le tre equazioni richieste sono, nell'ordine:

$$x - 2y + 4 = 0; \quad x - 2y - 4 = 0; \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Le rette a , b si corrispondono nella simmetria rispetto all'origine;

le rette a , c si corrispondono nella simmetria rispetto all'asse y ;

le rette b , c si corrispondono nella simmetria rispetto all'asse x .

4) Si consideri un'equazione del tipo $x^2 + px + q = 0$, dove p e q sono numeri interi relativi. E' vero che per ogni valore di p esistono infiniti valori di q tali che l'equazione $x^2 + px + q = 0$, ammette come soluzioni due numeri interi relativi? E' vero che per ogni valore di q esistono infiniti valori di p tali che l'equazione $x^2 + px + q = 0$, ammette come soluzioni due numeri interi relativi?

La somma delle due radici dell'equazione data è $-p$, mentre il prodotto è q .

Dato p , esistono infinite coppie di numeri interi relativi che hanno per somma $-p$ (ad esempio: 0 e $-p$, -1 e $1-p$, 1 e $-1-p$, -2 e $2-p$, ecc.). Invece, un qualunque numero q (diverso da 0) è scomponibile nel prodotto di due numeri interi relativi solo in un numero finito di modi (ad esempio: $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$).

5) Tre compagni di classe confrontano i voti che hanno riportato nei 4 scritti di matematica che hanno svolto durante l'anno.

Andrea afferma di essere il più bravo dei tre, perché la media aritmetica dei suoi voti è migliore di quella dei compagni.

A sua volta, Bruno dice che il più bravo è lui: è l'unico fra i tre che ha riportato un "10" ed è l'unico che non ha mai avuto insufficienze.

Infine, Carlo ribatte di essere il migliore: in ben 3 dei 4 scritti ha avuto un voto migliore degli altri.

Si mostri, attraverso un opportuno esempio, che la situazione descritta, per quanto improbabile, può effettivamente verificarsi. Si assume che i tre studenti abbiano svolto tutti gli scritti e che i voti siano numeri interi compresi fra 1 e 10.

Questo esercizio va risolto per tentativi, cercando voti compatibili con le informazioni. Una possibile risposta è riassunta nello schema seguente.

Andrea	5	8	8	8
Bruno	10	6	6	6
Carlo	1	9	9	9

6) Nel classico gioco dell'oca c'è una pista suddivisa in caselle, contrassegnate dai numeri naturali positivi (in un certo senso lo 0 corrisponde al punto di partenza). Ogni giocatore, a turno, lancia un dado e sposta in avanti il suo contrassegno del numero di caselle indicate dal dado. (Non prendiamo in considerazione caselle con messaggio del tipo "vai al n. 12" o "torna indietro di tre passi".)

Per semplicità, supponiamo di lanciare una moneta al posto di un dado: se viene testa il giocatore avanza di 1 casella, se viene croce il giocatore avanza di 2 caselle.

Qual è la probabilità che un giocatore passi per la casella n. 1? E per la casella n. 2? E per la casella n. 3?

Dimostrare che, per ogni $x > 2$, la probabilità di capitare nella casella x è la media aritmetica delle probabilità di capitare in ciascuna delle due caselle precedenti, $x-1$ ed $x-2$.

Qual è la casella in cui è più probabile passare? E quella in cui è meno probabile? (Si supponga che la pista contenga, in tutto, 20 caselle).

Una risoluzione completa di questo problema è stata pubblicata e commentata sulla rivista Archimede, n. 2 del 2005, pag. 92.

Il sito Internet della rivista è www.lemonnier.it/archimede/

Qui ci limitiamo a riportare le risposte. La probabilità p_1 di capitare nella casella 1 è $1/2$, mentre la probabilità p_2 di capitare nella casella 2 è $3/4$.

In generale, si giunge alla casella n o se si parte dalla casella $n-2$ ed esce C , oppure se si parte dalla casella $n-1$ ed esce T .

A questo punto è facile calcolare: $p_3 = 5/8$, $p_4 = 11/16$, ...

La casella in cui è più probabile passare è la n. 2, mentre quella in cui è meno probabile passare è la n. 1. Si noti che potremmo aggiungere $p_0 = 1$: è certo che si passa dalla casella iniziale.

I numeri della successione p_n sono legati anche da altre relazioni ricorsive, come $p_n = 1 - p_{n-1}/2$.

7) In una classe ci sono 10 tifosi fra Juventus e Milan. Si sa che delle seguenti frasi, una e una sola è vera. Di quale frase si tratta?

- A. Ci sono almeno 6 juventini
- B. I milanisti sono non più di 5
- C. Gli juventini sono meno di 3
- D. Gli juventini sono almeno tanti quanti i milanisti
- E. Ci sono almeno 5 milanisti

(Suggerimento: se due frasi sono equivalenti, allora non possono essere vere ...)

Le affermazioni B e D sono equivalenti: se fosse vera una, sarebbe vera anche l'altra e avremmo due frasi vere.

Se fosse vera la frase A, sarebbe vera anche la D, e ancora avremmo due frasi vere. Analogamente, se fosse vera la frase C, sarebbe vera anche la E.

Invece può capitare che sia vera la sola frase E: questo si verifica se ci sono 4 juventini e 6 milanisti, ovvero se ci sono 3 juventini e 7 milanisti.

8) Una piramide a base quadrata ha per facce laterali quattro triangoli equilateri. Se ogni spigolo della piramide ha lunghezza unitaria, qual è la lunghezza del raggio della sfera circoscritta alla piramide?

Il poliedro descritto è la metà di un ottaedro regolare (solido che ha 6 vertici, collocati ai centri delle facce di un cubo). In sostanza, la piramide di cui si parla è inscritta in una semisfera, che per diametro una diagonale del quadrato di base: la risposta è quindi $\sqrt{2} / 2$.

Un metodo alternativo consiste nell'indicare con x la distanza del centro O della sfera dal vertice V della piramide. Tenendo presente che, come è ovvio, O si trova sull'altezza uscente da V , si scrive un'equazione applicando il teorema di Pitagora ed imponendo che la distanza di V dai vertici della base sia uguale ad x . L'equazione ammette come unica radice positiva il valore prima trovato.

9) In numerazione binaria, il numero «quattro» si scrive 100. Se aggiungiamo la cifra 1 all'inizio, otteniamo 1100 che, sempre in numerazione binaria, corrisponde al numero «dodici», cioè al triplo di quattro.

Trovare altri numeri naturali n che godono della stessa proprietà, cioè tali che, aggiungendo la cifra 1 all'inizio della scrittura in notazione binaria di n , si ottiene il triplo del numero n .

Di quali numeri si tratta?

Altri esempi di numeri che godono della proprietà descritta sono:

$1 = \text{«uno»}$; infatti $11 = \text{«tre»} = \text{triplo di «uno»}$;

$10 = \text{«due»}$; infatti $110 = \text{«sei»} = \text{triplo di «due»}$;

$1000 = \text{«mille»}$; infatti $11000 = \text{«tremila»} = \text{triplo di «mille»}$.

In generale, si tratta delle potenze di 2. Infatti, la potenza 2^n è rappresentata, in numerazione binaria, da un 1 seguito da n zeri. La scrittura $1100\dots 0$ (con n zeri) rappresenta $2^{n+1} + 2^n = 3 \cdot 2^n$.

Viceversa, da $2^{n+1} + x = 3 \cdot x$ segue $x = 2^n$.

10) Dimostrare che se tre numeri reali (diversi fra loro) formano una progressione aritmetica, allora quei tre numeri, nello stesso ordine, non possono formare una progressione geometrica.

Trovare poi tre numeri reali relativi (diversi fra loro e da 0) in progressione aritmetica che, in un ordine diverso, formino una progressione geometrica.

(Si ricorda che tre numeri a, b, c formano una progressione aritmetica se $a-b = b-c$, e che tre numeri a, b, c formano una progressione geometrica se $a/b = b/c$).

Se esistessero tre numeri a, b, c tali che

$$a-b = b-c \quad \text{ed} \quad a/b = b/c$$

avremmo $b = (a+c)/2$ e quindi $ac = (a+c)^2 / 4$.

Se ne deduce successivamente $4ac = (a+c)^2 \quad (a-c)^2 = 0 \quad a = c$

e quindi $a = b = c$, contrariamente a quanto richiesto.

I tre numeri $-2 \quad 1 \quad 4$ sono in progressione aritmetica, mentre

i tre numeri $1 \quad -2 \quad 4$ sono in progressione geometrica.